

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Controllo Hamiltoniano: Estensione al modello di Kuramoto

Gjata, Oltiana

Award date:
2016

Awarding institution:
Università di Firenze

[Link to publication](#)

General rights

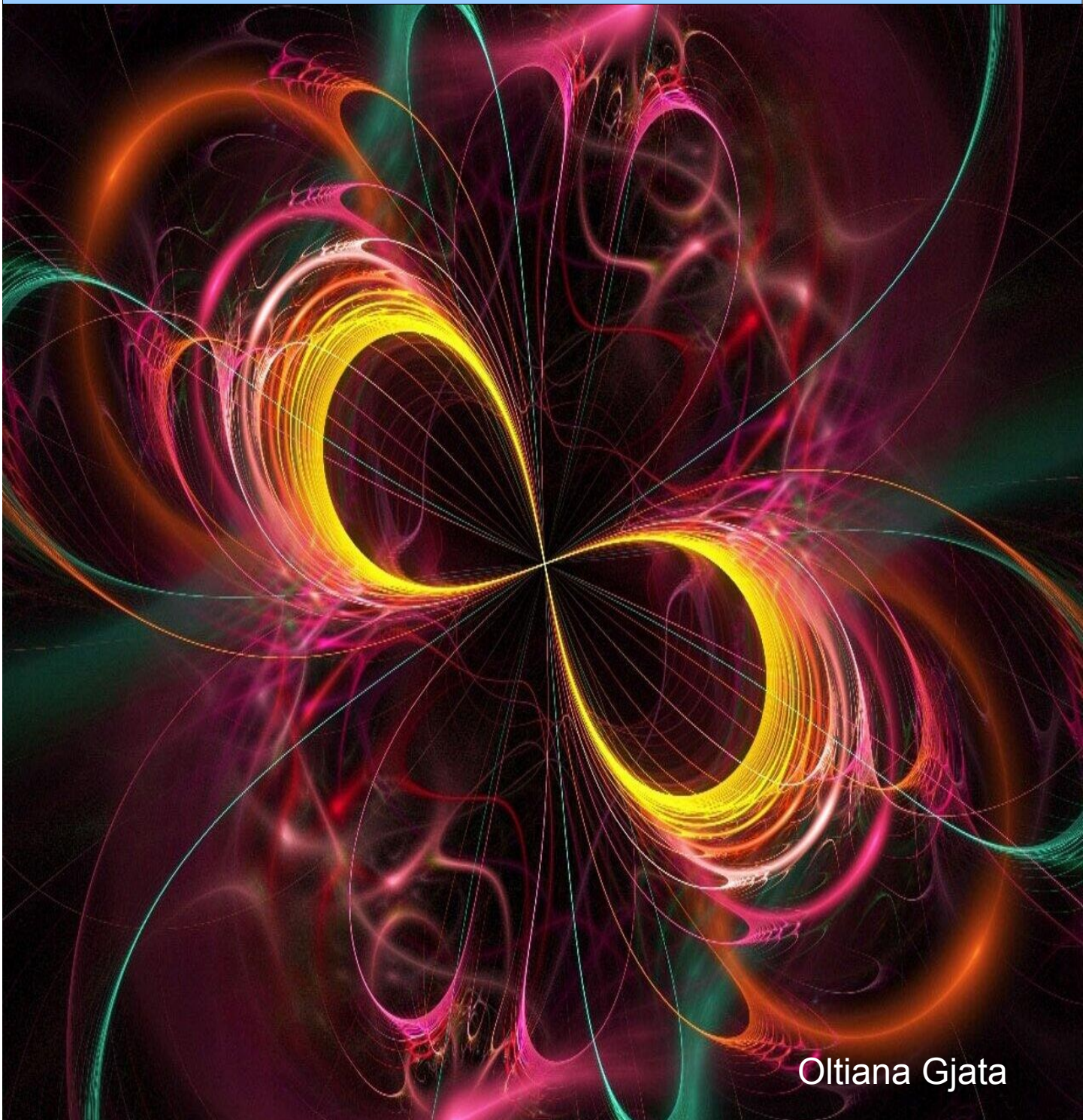
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Controllo Hamiltoniano: Estensione al modello di Kuramoto



Oltiana Gjata



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

CONTROLLO HAMILTONIANO: ESTENSIONE AL MODELLO DI KURAMOTO

Relatore:
Prof. **Luigi Barletti**

Correlatore:
Prof. **Timoteo Carletti**

Candidata:
Oltiana Gjata

A.A. 2015-2016

Indice	i
Introduzione	1
1 Nozioni fondamentali della meccanica Hamiltoniana	5
1.1 Il quadro teorico	5
1.1.1 Le parentesi di Poisson	5
1.1.2 Algebra degli operatori di Lie	6
1.2 Alcuni lemmi importanti	7
1.3 Proprietà geometriche dei sistemi Hamiltoniani	9
1.3.1 Teorema di Liouville (del flusso di fase)	10
1.4 Cenni alla teoria canonica delle perturbazioni	10
1.4.1 Teorema KAM	10
1.5 Mappa di Poincaré	12
2 Teoria del controllo Hamiltoniano	15
2.1 Introduzione al problema	15
2.2 Teorema del controllo per sistemi Hamiltoniani	17
2.2.1 Controllo dell'ordine superiore	20
2.3 Esempio: Il controllo del modello del pendolo forzato	20
3 Modello di Kuramoto	29
3.1 Introduzione	29
3.2 Modello di Kuramoto	30
3.2.1 Parametro d'ordine	31
3.2.2 Le simulazioni numeriche	33
3.2.3 Problemi aperti	34
3.3 Analisi di Kuramoto	35
3.4 Il limite continuo del modello di Kuramoto	37
3.4.1 La stabilità dello stato incoerente	39

4	Formalismo Hamiltoniano del modello di Kuramoto	43
4.1	Introduzione	43
4.2	Il modello Hamiltoniano equivalente	44
4.3	Sistemi di modelli elementari	45
4.3.1	Esempio: Reticolo di oscillatori nel condensato di Bose-Einstein (BEC)	47
4.4	La transizione alla sincronizzazione	49
5	Controllo della sincronizzazione nel modello di Kuramoto	55
5.1	Controllo Hamiltoniano degli oscillatori accoppiati in fase	55
5.2	Il termine di controllo nel modello di Kuramoto	59
5.3	Risultati numerici	61
5.4	Conclusioni	64
	Conclusioni	65
	A Integratori simplettici	67
	Bibliografia	69

La sincronizzazione gioca un ruolo importantissimo in Natura ed in modo particolare per tutti gli esseri viventi. La loro attività è regolata da processi periodici di diversa durata che determinano il loro comportamento individuale e collettivo. Consideriamo il seguente esempio. Supponiamo di assistere ad un concerto. Ogni membro dell'orchestra suona una sequenza di note che, opportunamente combinati secondo una composizione musicale, ispira un sentimento profondo nei nostri sensi. L'effetto può essere sorprendente oppure no semplicemente a seconda del momento esatto in cui il suono viene emesso. Nel frattempo, il nostro cuore batte ritmicamente perché migliaia di cellule sincronizzano la loro attività. Il carattere emozionale che la musica stessa suscita può accelerare o decelerare il nostro battito cardiaco. Vediamo il conduttore che muove armoniosamente le braccia. I musicisti sanno perfettamente come interpretare questi movimenti e rispondere con l'azione appropriata. Migliaia di neuroni nella corteccia visiva, sensibili a specifici orientamenti spaziali, riescono a sincronizzare le loro attività quasi subito, quando la bacchetta descrive una traiettoria nello spazio. E per concludere, a pochi secondi dopo l'ultima battuta, la folla che riempie completamente l'auditorium inizia ad applaudire. All'inizio il ritmo può essere incoerente, ma il desiderio di ottenere un bis può trasformare applausi incoerenti in una perfetta sincronia, nonostante la diversa forza nel battito o la posizione degli individui all'interno della sala da concerto.

Questi esempi illustrano la sincronizzazione, uno dei fenomeni cooperativi più travolgenti del nostro mondo. La sincronizzazione si osserva in biologia, chimica, fisica e come abbiamo appena visto pure in sociologia ed ha attirato l'interesse degli scienziati per secoli. Un paradigmatico esempio è il lampeggio sincrono di lucciole osservate in alcune foreste dell'Asia meridionale [1]. Di notte, una miriade di lucciole si appoggia sopra gli alberi. Improvvisamente, molte di loro cominciano ad emettere lampi di luce. Inizialmente lampeggiano incoerentemente, ma dopo un breve periodo di tempo l'intero sciame lampeggia all'unisono creando uno degli effetti visivi più suggestivi mai visto. L'importanza della sincronizzazione nel caso del lampeggiamento sincrono è dovuta al fatto che questo fenomeno può facilitare il corteggiamento tra maschi e femmine. Fra i tanti esempi possiamo menzionare il canto dei grilli all'unisono [2], la funzione delle cellule di pacemaker nel cuore [3], i cicli circadiani del nucleo soprachiasmatico del cervello [4] o addirittura i

tremori in malattie neurologiche come l'epilessia o Parkinson [5]. Casi importanti della sincronizzazione in fisica ampiamente studiate sono nei sistemi di laser accoppiati [6, 7] e nelle giunzioni dei superconduttori di Josephson [8, 9]. Una buona illustrazione della sincronizzazione e dell'ampia fenomenologia che la accompagna è data da Strogatz nel suo libro *SYNC: How Order Emerges From Chaos In the Universe, Nature, and Daily Life* [10].

La ricerca sulla sincronizzazione ha i suoi inizi nel XVII secolo quando il famoso fisico olandese Christiaan Huygens osservò che due orologi a pendolo appesi ad una lastra di legno dopo in po' di tempo si muovevano in modo sincrono. Comunque dovevano passare ancora altri tre secoli prima che una ricerca sistematica portasse i suoi frutti. È stato prima Winfree [11, 12] e poi Kuramoto [13, 14] che proposero i primi modelli matematici in grado di spiegare la sincronizzazione. Il celebre modello di Kuramoto che viene usato tutt'ora come modello paradigmatico per illustrare la dinamica dei moti collettivi in sincronia fra di loro, ci dice che un numero consistente di oscillatori armonici accoppiati in fase tramite una funzione non lineare riesce ad "auto-organizzarsi" quando l'accoppiamento è relativamente forte. Infatti una volta superata una certa soglia del coefficiente di accoppiamento fra le coppie di oscillatori una parte di loro inizia gradualmente a ruotare nello stesso modo con la stessa fase e man mano che il coefficiente cresce tutti gli oscillatori si aggiungono al gruppo di quelli sincronizzati. Un'analisi qualitativa del modello di Kuramoto [13–17] permette di capire quando è il momento della transizione dallo stato asincrono a quello sincronizzato e calcolare l'accoppiamento critico in modo accurato. Anche se ancora rimangono delle questioni irrisolte legate alla stabilità globale della dinamica, il formalismo di Kuramoto rimane il miglior approccio possibile del problema della sincronizzazione ed ovviamente è stato largamente usato in questa tesi come anche in letteratura.

Come abbiamo potuto notare la sincronizzazione ha dei lati positivi e indispensabili per il mondo vivente. Dall'altra parte esistono anche degli effetti negativi e del tutto indesiderati come la risonanza nelle costruzioni come ponti o edifici oppure la sincronizzazione anomala delle cellule del cervello responsabile per varie malattie neurologiche. Un famoso esempio è quello del futuristico ponte pedonale, il *Millennium Bridge* di Londra [18] inaugurato nel 10 giugno del 2000. Con tanto clamore, dopo solo due giorni le autorità furono obbligate a chiuderlo a causa delle forti vibrazioni laterali che si manifestarono quasi subito. L'evento fu un fiasco totale. Infatti, come si dimostrò in seguito [19] fu l'ansiosa folla di gente che non vedeva l'ora di provare il nuovo ponte che causò le vibrazioni. Il problema della stabilità dei ponti è un problema assai noto. Già nell'antichità ai soldati fu ordinato di rompere il passo di marcia quando attraversavano un ponte. Nel caso del Millennium Bridge (Figura 1), ad esempio, le vibrazioni appaiono quando la folla dei pedoni che attraversa il ponte supera un certo numero di individui. Infatti una volta che il ponte cominciava inizialmente a vibrare di poco per ragioni di progettazione, la gente reagiva in modo sincrono alle vibrazioni amplificandole così di loro volta. La struttura del ponte stesso invece giocava il ruolo del mezzo di accoppiamento fra i pedoni. A questo punto è ovvio domandarsi che cosa si può fare per evitare che i sistemi in questione inizino a sincronizzarsi. Vari tentativi sono stati fatti fin ora, dall'utilizzo di metodi classici di controllo che si basano sul feedback negativo [20] a quelli meno ortodossi di intervenire disturbando esternamente il sistema interessato in modo casuale [21].

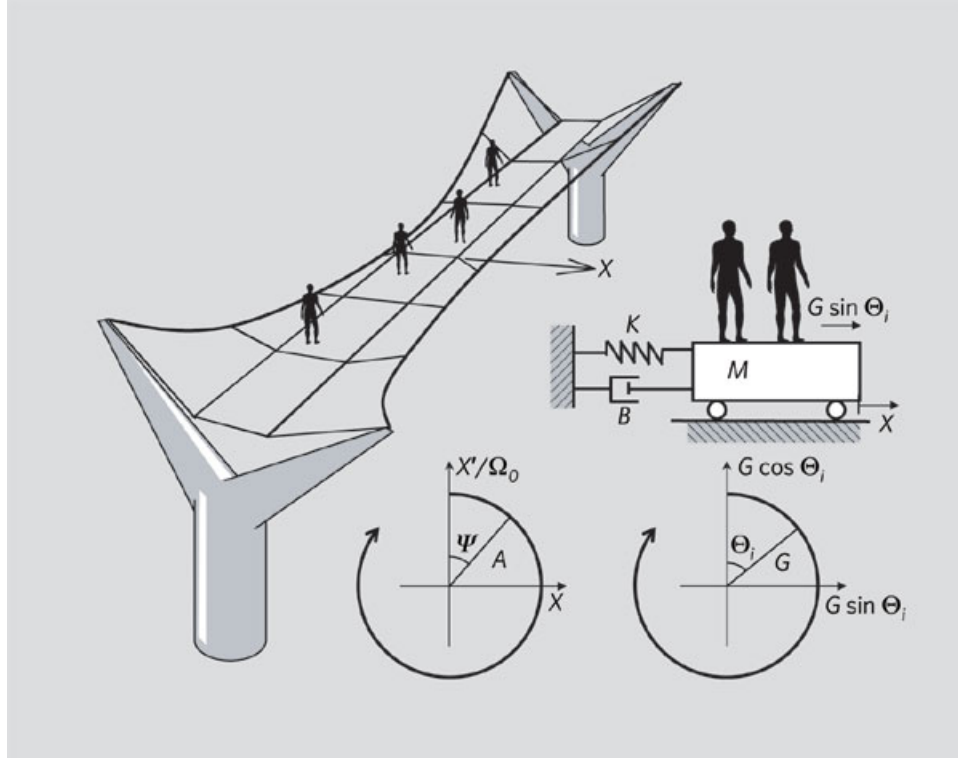


Figura 1: Schema illustrativo del Millenium Bridge di Londra [19]. (Figura riprodotta da [19]).

Tuttavia metodi del genere sono risultati poco produttivi poiché inaffidabili oppure troppo costosi. Per di più questi agiscono a posteriori alla manifestazione della sincronizzazione.

Partendo da queste considerazioni il motivo di questo lavoro di tesi è stato quello di costruire dei metodi robusti di controllo in modo da poter evitare che il sistema entri in sincronia e per di più con un sforzo minimo in termini di costo. Recentemente, due studiosi tedeschi Witthaut e Timme hanno scoperto che è possibile riformulare il problema di Kuramoto in termini di un formalismo Hamiltoniano [22]. Infatti è possibile dimostrare che esiste un sistema Hamiltoniano, che quando la sua dinamica viene ristretta ad un toro invariante riproduce fedelmente la dinamica delle equazioni di Kuramoto. Si è capito inoltre che quando il sistema passa da uno stato non sincronizzato ad uno sincronizzato la sua dinamica diventa stabile intorno ad un preciso toro invariante, detto anche toro di Kuramoto, a caotica. Sfruttando questa proprietà della dinamica Hamiltoniana siamo stati in grado di costruire un piccolo termine di controllo “ad hoc” in modo da comprimere del tutto il regime caotico e perciò anche quello sincronizzato dal punto di vista di Kuramoto. Il formalismo Hamiltoniano risulta cruciale nel nostro approccio ed è il punto forte della nostra teoria. Questo è principalmente dovuto al fatto che i sistemi Hamiltoniani sono stati studiati da molto tempo e sono state tante le teorie nate intorno a loro. Una di queste è la teoria del controllo Hamiltoniano di Vittot e collaboratori [23–26] che consiste nel controllare il caos in un sistema conservativo perturbato utilizzando un piccolo termine di controllo di almeno un ordine più piccolo in confronto alla perturbazione. Questa tecnica per esempio è stata usata con successo nel caso degli acceleratori di particelle [25] dove quest’ultime devono percorrere delle orbite molto

precise sotto l'azione di un campo elettromagnetico. Questa si basa su un classico approccio perturbativo e perciò è valida solo nel caso quando la perturbazione è sufficientemente piccola.

Nel modello di Kuramoto sappiamo che la parte contenente l'accoppiamento degli oscillatori è responsabile per la sincronizzazione. Allora è qui che si deve intervenire per sopprimere ogni tentativo di auto-organizzazione. Ovviamente sarebbe troppo facile (e pure troppo bello!) di modificare semplicemente il coefficiente dell'accoppiamento perché nei modelli reali egli non è accessibile direttamente. Dall'altra parte ogni tentativo di controllo del tipo retroattivo significa intervenire con una forza di almeno della stessa grandezza come la perturbazione. Come si è visto nel caso del Millennium Bridge questo comporta un costo troppo elevato [18]. A questo punto sembra naturale applicare la teoria di Vittot come l'alternativa migliore. Difatti una volta che i piccoli termini di controllo sono stati aggiunti al modello originale di Kuramoto gli oscillatori non sono più in grado di sincronizzarsi. Lo stesso comportamento si ottiene naturalmente anche nel sistema Hamiltoniano dove il caos svanisce. I risultati numerici confermano l'esattezza della nostra teoria.

Come conclusione, in questa tesi sviluppiamo passo dopo passo un metodo Hamiltoniano per controllare la sincronizzazione nel modello di Kuramoto in modo efficace e robusto. Lo studio analitico ci permette per esempio di poter progettare una struttura immune ad ogni effetto di risonanza e quindi stabile dal punto di vista strutturale. In più questo ci permette di pensare possibili meccanismi che siano in grado di intervenire a livello cellulare in modo da combattere i sintomi di malattie come il morbo di Parkinson.

Questa tesi è stata organizzato in cinque capitoli. Nel primo richiamiamo brevemente i concetti di base della meccanica Hamiltoniana. Nel Capitolo 2 invece introduciamo la teoria del controllo Hamiltoniano. Il modello di Kuramoto viene presentato nel Capitolo 3. In quello successivo viene descritto il formalismo Hamiltoniano dello stesso modello. Ed in fine nel ultimo capitolo presentiamo il nostro risultato legato al controllo Hamiltoniano del modello di Kuramoto.

Nozioni fondamentali della meccanica Hamiltoniana

In questo primo capitolo richiameremo i concetti di base della meccanica Hamiltoniana. In modo particolare ci occuperemo di introdurre il problema delle perturbazioni del moto quasi-periodico che ci consentirà in seguito di comprendere al meglio il problema di controllo Hamiltoniano. Un altro aspetto importante è anche quello della mappa di Poincaré, un strumento validissimo nel valutare la regolarità delle orbite in un sistema Hamiltoniano è rivelare la presenza del moto caotico. Per maggiori dettagli il lettore interessato è pregato di far riferimento alla seguente bibliografia [27, 28].

1.1 Il quadro teorico

Iniziamo definendo il quadro del formalismo della meccanica Hamiltoniana, in cui un sistema fisico è descritto, introducendo un insieme di coordinate canoniche $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^t$ dove $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ sono rispettivamente, il vettore delle coordinate e quello dei momenti lineari. Il sistema ha quindi n gradi di libertà.

La dinamica di tale sistema è descritta da una funzione scalare chiamata *Hamiltoniana* $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, e le equazioni del moto sono definite come:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Il sistema viene così rappresentato da $2n$ equazioni differenziali di ordine 1.

1.1.1 Le parentesi di Poisson

Un strumento algebrico molto utile sono le parentesi di Poisson definite come:

Definizione 1.1. Sia $x = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$, allora le *parentesi di Poisson* di due funzioni f e g sono date da

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right). \quad (1.1.2)$$

Le equazioni di Hamilton prendono così la forma seguente:

$$\dot{q}_k = \{H, q_k\} \quad \dot{p}_k = \{H, p_k\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.1.3)$$

Notiamo inoltre che in questa tesi abbiamo scelto di non seguire la definizione più comune delle parentesi di Poisson che sarebbe la stessa di (1.1.2) ma con il segno invertito (vedi per esempio [27]). Anche se questo cambiamento nella notazione è importante, non rappresenta un ostacolo, perché le due definizioni sono equivalenti a meno del segno.

A questo punto siamo in grado di ridefinire le variabili canoniche in modo rigoroso come

Definizione 1.2. Le coordinate canoniche q_k e p_k sono le coordinate nello spazio di fasi che soddisfano:

$$\{q_k, q_l\} = 0 \quad \{p_k, p_l\} = 0 \quad \{p_k, q_l\} = \delta_{kl}$$

dove δ_{kl} è il simbolo di Kronecker:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{if } k = l, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1.1.2 Algebra degli operatori di Lie

Questo paragrafo fa riferimento alla particolare struttura di Lie presente negli operatori lineari rappresentati dalle parentesi di Poisson [23]. Per questo motivo consideriamo lo spazio vettoriale \mathcal{A} (che chiameremo anche lo spazio degli osservabili) dei funzioni reali C^∞ definiti nello spazio delle fasi. Per ogni $V \in \mathcal{A}$ definiamo $\{V\}$ come operatore lineare che agisce su \mathcal{A} tale che per ogni $W \in \mathcal{A}$ abbiamo:

$$\{V\}W = \{V, W\}$$

dove $\{.,.\}$ sono le parentesi di Poisson. Più formalmente, se $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ è lo spazio degli operatori lineari di \mathcal{A} , la mappa:

$$\{...\} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}), \quad V \rightarrow \{V\}$$

verifica $\forall V, W \in \mathcal{A}$

$$\{V\}W = -\{W\}V \quad (1.1.4)$$

che si chiama la proprietà *antisimmetrica* e

$$\{\{V\}W\} = \{V\}W - \{W\}V \quad (1.1.5)$$

l'identità di Jacobi.

L'evoluzione temporale di una funzione $V \in \mathcal{A}$ valutata sul flusso dell'Hamiltoniana $H \in \mathcal{A}$ (vedi eq. 1.1.3) viene definito come:

$$\frac{dV}{dt} = \{H\}V, \quad (1.1.6)$$

la cui soluzione si definisce formalmente come¹

$$V(t) = e^{t\{H\}}V(0) \quad (1.1.7)$$

dove

$$e^{t\{H\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \{H\}^k \in \mathcal{L}(\mathcal{A}). \quad (1.1.8)$$

Osservazione 1 (Composizione). La nozione precedente della composizione $\{H\}^k$ si riferisce alla composizione degli operatori con $\{H\}^0$ chiamato operatore identità, cioè

$$\forall H, V \in \mathcal{A} \quad \{H\}^k V = \{H\}^{k-1}(\{H\}V) \quad e \quad \{H\}^0 V = V.$$

È ovvio a questo punto che ogni elemento $V \in \mathcal{A}$ che verifica $\{H\}V = 0$ è una *costante di moto* sotto il flusso di H , cioè

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{t\{H\}}V = V.$$

Lo spazio vettoriale di tutte le costanti di moto è il nucleo degli operatori $\{H\}$. Vogliamo sottolineare che $\text{Ker}\{H\}$ è non banale (p.es. per ogni k tale che H^k è in \mathcal{A} , abbiamo che $\{H\}H^k = 0$) ed è una sotto-algebra di Lie di \mathcal{A} . Infatti, la composizione, in termini di parentesi, $\{V\}W$ dei due elementi $V, W \in \text{Ker}\{H\}$ rimane nel nucleo di $\{H\}$ usando l'identità di Jacobi (eq. 1.1.5):

$$\{H\}\{V\}W = \{V\}\{H\}W + \{\{H\}V\}W = 0.$$

Osservazione 2 (Campo vettoriale). Consideriamo l'azione di un operatore $\{H\} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ su un campo vettoriale $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ (dove $\forall i, V_i \in \mathcal{A}$) definito componente per componente:

$$\{H\}\mathbf{V} = (\{H\}V_1, \dots, \{H\}V_n).$$

Così possiamo esprimere le equazioni di moto di $x \in \mathbb{R}^{2n}$ e le loro soluzioni nella forma compatta

$$\dot{\mathbf{x}} = \{H\}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{t\{H\}}\mathbf{x}(0).$$

1.2 Alcuni lemmi importanti

In questa sezione presenteremo e successivamente dimostreremo tre lemmi che saranno usati in seguito. Tali lemmi, il lettore interessato li può trovare anche in [29] oppure [23].

¹Vogliamo mettere in evidenza che l'eq. (1.1.6) vale solo nel caso quando H è indipendente dal tempo, altrimenti è sempre possibile di rendere H autonoma aggiungendo una variabile (p.es. l'energia) coniugata col tempo.

Lemma 1.2.1.

$$\forall V, W \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \{\{V\}^n W\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \{V\}^{n-k} \{W\} \{-V\}^k \quad (1.2.1)$$

Dimostrazione. La dimostrazione si fa per induzione. Il caso $n = 1$ è l'identità di Jacobi (1.1.5). Consideriamo (1.2.1) vero per n e lo dimostriamo per $(n + 1)$. Più precisamente avremo:

$$\begin{aligned} \{\{V\}^{n+1} W\} &= \{\{V\} \{V\}^n W\} \stackrel{1.1.5}{=} \{V\} \{\{V\}^n W\} - \{\{V\}^n W\} \{V\} \\ &\stackrel{1.2.1}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \{V\}^{n-k+1} \{W\} \{-V\}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \{V\}^{n-k} \{W\} \{-V\}^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \{V\}^{n+1-k} \{W\} \{-V\}^k + \{V\}^{n+1} \{W\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \{V\}^{n+1-k} \{W\} \{-V\}^k + \{W\} \{-V\}^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \{V\}^{n+1-k} \{W\} \{-V\}^k \\ &\quad + \{V\}^{n+1} \{W\} + \{W\} \{-V\}^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \{V\}^{n+1-k} \{W\} \{-V\}^k \end{aligned}$$

□

Lemma 1.2.2.

$$\forall V, W \in \mathcal{A} \quad \{e^{\{V\}} W\} = e^{\{V\}} \{W\} e^{-\{V\}} \quad (1.2.2)$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo lemma useremo quello precedente. Inizialmente sommiamo su k ambedue i membri dell'uguaglianza (1.2.1), poi dividiamo per $k!$ e in fine usando la linearità delle parentesi di Poisson si ottiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k \geq 0} \frac{\{V\}^k}{k!} W \right\} &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \{V\}^{k-j} \{W\} \{-V\}^j \\ &= \sum_{p,q} \frac{\{V\}^p}{p!} \{W\} \frac{\{-V\}^q}{q!} \\ &= \sum_p \frac{\{V\}^p}{p!} \{W\} \sum_q \frac{\{-V\}^q}{q!} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

La dimostrazione si conclude usando (1.1.8). □

Lemma 1.2.3.

$$\forall V, W \in \mathcal{A} \quad \exp \left(e^{-\{V\}} \{W\} e^{\{V\}} \right) = e^{-\{V\}} e^{\{W\}} e^{\{V\}} \quad (1.2.4)$$

Dimostrazione. Sviluppiamo in serie di Taylor:

$$\exp \left(e^{-\{V\}} \{W\} e^{\{V\}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(e^{-\{V\}} \{W\} e^{\{V\}} \right)^k$$

e notiamo che il termine generale, una volta espanso è dato da

$$\frac{1}{k!} \overbrace{\left(e^{-\{V\}} \{W\} \underbrace{e^{\{V\}}}_{=1} (e^{-\{V\}} \{W\} e^{\{V\}}) \dots (e^{-\{V\}} \{W\} \underbrace{e^{\{V\}}}_{=1} (e^{-\{V\}} \{W\} e^{\{V\}}) \right)}^{k \text{ in totale}}$$

così,

$$\exp \left(e^{-\{V\}} \{W\} e^{\{V\}} \right) = e^{-\{V\}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{W\}^k}{k!} e^{\{V\}}$$

□

1.3 Proprietà geometriche dei sistemi Hamiltoniani

Una delle proprietà che caratterizzano in modo particolare i sistemi Hamiltoniani è quella della conservazione del volume dello spazio delle fasi sotto l'azione di un flusso Hamiltoniano. Da questo ne segue che un sistema Hamiltoniano non può avere degli attrattori (per esempio punti fissi, cicli limite) stabili o instabili. Questa peculiarità geometrica viene descritta in modo rigoroso dal teorema seguente.

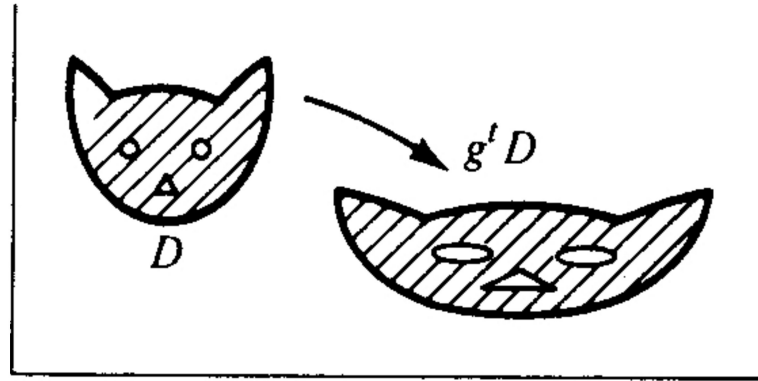


Figura 1.1: Conservazione del volume della regione D dello spazio delle fasi sotto l'azione del flusso g^t .

1.3.1 Teorema di Liouville (del flusso di fase)

Definiamo inizialmente il flusso di fase come l'applicazione g^t nello spazio delle fasi tale che

$$g^t : (\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) \rightarrow (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$$

dove $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ soddisfano le equazioni di Hamilton (1.2).

Teorema 1.3.1 (Liouville). *Se $V(t)$ è il volume della regione $D(t)$ al momento t allora*

$$V(g^t(D)) = V(D)$$

cioè il flusso g^t conserva il volume dello spazio delle fasi.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che se $dV(t)/dt = 0$. Infatti abbiamo che

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt} \int_{D(t_0)} \det \left(\frac{\partial g^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{D(t_0)} \det \left(\frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})(t - t_0) + \mathcal{O}(t^2))}{\partial \mathbf{x}} \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{D(t_0)} \det \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (t - t_0) + \mathcal{O}(t^2) \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{D(t_0)} \left(1 + \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) (t - t_0) + \mathcal{O}(t^2) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{D(t_0)} \text{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

A questo punto se $g^t \equiv H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ allora è immediato la tesi

$$\text{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right).$$

□

1.4 Cenni alla teoria canonica delle perturbazioni

In questo paragrafo richiameremo brevemente il risultato forse più importante legato alla teoria della meccanica Hamiltoniana: il Teorema di Kolmogorov-Arnol'd-Moser o brevemente KAM [28]. Esso è una pietra miliare dello studio della stabilità dei sistemi dinamici conservativi e perciò è doveroso ricordarlo per l'ennesima volta anche in questa tesi in relazione anche al successivo metodo di controllo Hamiltoniano che discuteremo nel prossimo capitolo.

1.4.1 Teorema KAM

Un sistema Hamiltoniano H_0 integrabile possiede n integrali primi ovvero n costanti di moto. Ogni insieme di livello di tutti questi integrali è un toro n -dimensionale

nello spazio delle fasi di dimensione $2n$. Questo toro è invariante rispetto al flusso di fase del sistema non perturbato: ogni curva di fase che esce da un punto di un tale toro, resta su di esso. Inoltre, si dimostra che si possono scegliere delle coordinate canoniche $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi})$ chiamate variabili di *azione-angolo*, tali che gli integrali primi dipendono soltanto da \mathbf{I} , mentre $\boldsymbol{\phi}$ sono delle coordinate angolari sul toro.

Il moto del punto di fase su un toro invariante $I_i = \text{cost}$ è quasi periodico. Questo significa che l'orbita che avvolge il toro non passa mai due volte sullo stesso punto. Le frequenze di questo moto sono le derivate dell'Hamiltoniana non perturbata rispetto alle variabili d'azione

$$\phi_i = \omega_i(I_i), \quad \text{dove } \omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}.$$

Dunque, la curva di fase è ovunque densa su un toro, la cui dimensione è uguale al numero delle frequenze ω_i razionalmente indipendenti (incommensurabili).

Notiamo che le frequenze dipendono da quale toro consideriamo, cioè dai valori degli integrali primi che abbiamo fissato. In generale, il sistema delle n funzioni ω_i nelle n variabili I_i è funzionalmente indipendente: in tal caso possiamo facilmente numerare i tori con le frequenze, prendendo le variabili ω_i come coordinate nell'intorno del punto considerato nello spazio delle variabili d'azione I_i per $i = 1, \dots, n$.

Il caso di frequenze funzionalmente indipendenti viene detto caso non degenero.

Definizione 1.3. Dunque, la condizione di *non degenerazione* si scrive

$$\det \left| \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{I}} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^2} \right| \neq 0 \quad (1.4.1)$$

Un'altra condizione utile sarà quella detta anche Diofantea

Definizione 1.4. Un vettore di frequenze $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$ si dice (γ, r) -Diofanteo se

$$|\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}| \geq \frac{\gamma}{|\mathbf{k}|^r} \quad (1.4.2)$$

dove $|\mathbf{k}| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|$.

Possiamo ora impostare il problema canonico delle perturbazioni di un sistema Hamiltoniano integrabile. Consideriamo a questo proposito un sistema Hamiltoniano quasi-integrabile

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon V(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi}). \quad (1.4.3)$$

Se $\epsilon = 0$ il sistema è integrabile e tutti i moti sono limitati e quasi-periodici. Quando $\epsilon \neq 0$, anziché richiedere che questa proprietà sia conservata e che quindi il sistema sia ancora integrabile, ci si può domandare se almeno qualcuno di questi moti quasi-periodici imperturbati continui ad esistere nella versione perturbata. Non si pretende quindi di avere una foliazione regolare dello spazio delle fasi in tori invarianti, ma semplicemente di dimostrare l'esistenza, per valori di $\epsilon \neq 0$, di "alcuni" tori invarianti, rinunciando ad una loro dipendenza regolare dall'azione \mathbf{I} . Il teorema seguente dà una risposta affermativa a questa domanda: per valori di ϵ sufficientemente piccoli la maggior parte dei tori invarianti corrispondenti a frequenze $\boldsymbol{\omega}$ Diofantee sono conservati, e vengono soltanto leggermente deformati dalla perturbazione. I moti su questi tori sono quasi-periodici con la stessa frequenza $\boldsymbol{\omega}$ che li contraddistingue per $\epsilon = 0$.

Teorema 1.4.1 (Kolmogorov-Arnol'd-Moser). *Consideriamo un sistema Hamiltoniano quasi-integrabile (1.4.3) e supponiamo che l'Hamiltoniana non perturbata H_0 soddisfi la condizione di non degenerazione (1.4.1). Allora, per una perturbazione Hamiltoniana conservativa sufficientemente piccola, la maggior parte dei tori invarianti non risonanti, nel senso Diofanteo (1.4.2), non sparisce, ma si deforma soltanto un po', in modo che nello spazio delle fasi del sistema perturbato vi sono ugualmente dei tori invarianti su cui, sono ovunque dense le curve di fasi, che li avvolgono in modo quasi-periodico, con numero di frequenze pari al numero di gradi di libertà del sistema. I tori invarianti indicati sono la maggioranza, nel senso che la misura del complemento della loro unione è piccola insieme alla perturbazione.*

Più concretamente, partendo dal sistema Hamiltoniano H quando $\epsilon = 0$ e gradualmente crescendo la perturbazione, osserviamo la deformazione e poi la distruzione dei tori invarianti (detti anche tori KAM).

Il teorema KAM, deve il suo nome ai tre matematici che si sono impegnati nel suo sviluppo nel corso degli anni, primo fra tutti Andrej Kolmogorov nel 1954 che ha fornito la prima impostazione del problema della ricerca di orbite quasi-periodiche persistenti in un sistema dinamico conservativo perturbato [30]. Il problema è stato sviluppato ulteriormente nel 1962 da Jürgen Kurt Moser [31] e nel 1963 da Vladimir Arnol'd [32] che ne ha fornito una formalismo per sistemi Hamiltoniani. Qui ci limitiamo a solo il suo postulato.

1.5 Mappa di Poincaré

Henry Poincaré fu uno fra gli artefici dello studio della stabilità nei sistemi dinamici [27, 28]. Lavorando tra il 1887 ed il 1890 al problema della stabilità delle orbite di tre corpi celesti soggetti alla reciproca attrazione gravitazionale, per la prima volta scoprì che sistemi dinamici semplici (cioè con un basso numero di gradi di libertà) possono avere soluzioni estremamente complicate le quali, pur rimanendo confinate all'interno di un insieme limitato dello spazio delle fasi, non sono periodiche, né quasi-periodiche, né tendono ad un punto fisso (esse sono oggi chiamate soluzioni caotiche).

Uno degli strumenti matematici che fu necessario inventare per dimostrare l'esistenza di tali soluzioni è noto oggi col nome di *mappa di Poincaré*. Questa tecnica consiste nel ridurre un sistema dinamico a N dimensioni (cioè descritto da N equazioni) in una mappa $N - 1$ dimensionale. L'idea che sta alla base della sua costruzione è illustrata in Figura (1.2). Si tratta di scegliere una (iper-)superficie opportuna S che intersechi le orbite ottenute risolvendo un certo sistema dinamico. La sequenza $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots\}$ dei punti di intersezione fra le orbite e la superficie definisce una mappa $\mathbf{P} : S \mapsto S$ sulla superficie S . In particolare, se S interseca un'orbita periodica del sistema dinamico, la mappa \mathbf{P} avrà un punto fisso \mathbf{x}_F (tale che $\mathbf{x}_F = \mathbf{P}(\mathbf{x}_F)$). Pertanto, il problema di studiare la stabilità di un'orbita periodica di un sistema dinamico continuo si riconduce al problema di studiare la stabilità di un punto fisso della sua mappa di Poincaré. Per poter capire la sua funzione dobbiamo prima richiamare i concetti della stabilità nelle mappe, cioè i sistemi dinamici a tempo discreto. Per stabilità si intende che esiste un intorno Ω del punto fisso \mathbf{x}_F , cioè un punto per cui $\mathbf{F}(\mathbf{x}_F) = \mathbf{x}_F$, tale che, usando come condizione iniziale ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, l'orbita risultante ha la proprietà che $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_F| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. In caso contrario il punto fisso \mathbf{x}_F sarà

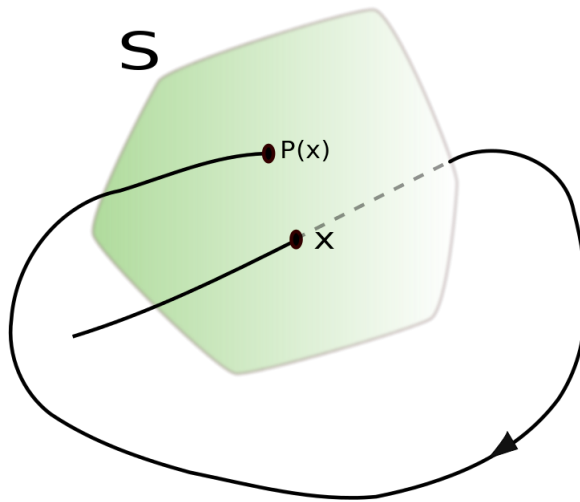


Figura 1.2: Nella sezione di Poincaré S , la mappa di Poincaré P proietta il punto x in $P(x)$.

considerato instabile. Anche nel caso delle mappe, la stabilità del punto fisso dipende dagli autovalori della matrice Jacobiana.

Supponiamo, dunque, che \mathbf{x}_F sia un punto fisso della mappa $\mathbf{F}(\mathbf{x}_F)$, e che $\tilde{\mathbf{x}}$ sia un vettore il cui modulo è molto piccolo ($\tilde{\mathbf{x}}$ giocherà il ruolo del termine perturbativo). Partiamo dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_F + \tilde{\mathbf{x}}$, e chiediamoci se l'orbita risultante si avvicina asintoticamente al punto fisso \mathbf{x}_F , oppure no. A questo punto, possiamo sfruttare la differenziabilità di \mathbf{F} e scrivere

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_F + \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{J}_F(\mathbf{x}_F)(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(|\tilde{\mathbf{x}}|^2) \quad (1.5.1)$$

dove il simbolo \mathbf{J}_F indica la matrice Jacobiana della funzione \mathbf{F} :

$$\mathbf{J}_F \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dove x_1, \dots, x_n sono le coordinate dello spazio \mathbb{R}^n in cui è definita \mathbf{F} ed F_1, \dots, F_n sono le componenti di \mathbf{F} . Usando l'espressione dell'eq. (1.5.1), si arriva a definire la linearizzazione multidimensionale intorno al punto fisso \mathbf{x}_F

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{J}_F(\mathbf{x}_F)\tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (1.5.2)$$

Questa è una mappa lineare in $\tilde{\mathbf{x}}$, anche se la sua soluzione non è così immediata come quella del caso lineare, per esempio. Applicandola in modo ricorsivo è possibile ottenere la traccia che l'orbita del sistema dinamico lascia nella sezione di Poincaré partendo da un dato punto iniziale come si può apprezzare anche in Figura (1.2). In modo analogo al caso di sistemi dinamici lineari a tempo continuo, la soluzione

della mappa (1.5.2) diventa molto più semplice se si opera un cambiamento lineare di coordinate che ci porta nel particolare sistema di riferimento in cui la matrice $\mathbf{J}_F(\mathbf{x}_F)$ è in forma diagonale. Sia, allora, T la matrice di tale cambiamento di coordinate, e sia $B = T^{-1} \cdot \mathbf{J}_F(\mathbf{x}_F) \cdot T$ la matrice trasformata in forma diagonale. Nelle nuove coordinate la linearizzazione (1.5.2) diventa

$$\mathbf{y}_{n+1} = B\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_n$$

dove i vettori \mathbf{y} sono definiti dalla trasformazione $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$. In queste coordinate il problema si disaccoppia in n problemi unidimensionali, ciascuno associato ad uno degli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (reali o complessi coniugati) della matrice Jacobiana $\mathbf{J}_F(\mathbf{x}_F)$ valutata nel punto fisso. Infatti si dimostra che esiste un intorno U del punto fisso \mathbf{x}_F in cui la dinamica della mappa linearizzata (1.5.2) è una buona approssimazione della dinamica della mappa completa. In particolare, se $|\lambda_i| < 1$ per $i = 1, \dots, n$, il punto fisso è stabile, mentre se esiste anche solo un autovalore λ_i tale che $|\lambda_i| > 1$, allora il punto fisso è instabile. Se, invece, esiste un autovalore $|\lambda_i| = 1$, la dinamica della mappa linearizzata non basta per determinare la stabilità o meno di un punto fisso ma è necessario un'analisi oltre il termine lineare. Nel caso quando la matrice Jacobiana non fosse diagonalizzabile allora essa si può sempre portare in forma di Jordan, e la stabilità del punto fisso dipenderà di nuovo dall'esistenza o meno di almeno un autovalore con modulo maggiore di uno.

In termini concettuali la mappa di Poincaré è una enorme semplificazione. In termini pratici, scrivere una espressione esplicita per la mappa \mathbf{P} richiede, di solito, di risolvere analiticamente il sistema dinamico di partenza, il che, ovviamente, in maggior parte dei casi è impossibile. Tuttavia, anche quando non è possibile trovare la mappa di Poincaré usando la soluzione analitica esatta, è sempre possibile integrare numericamente un sistema dinamico a tempo continuo e lasciare ad un programma per computer il compito estenuante di trovare i punti di intersezione fra l'orbita calcolata numericamente ed una superficie S opportunamente specificata. Per di più il semplice fatto di studiare l'evoluzione del sistema in $N - 1$ dimensioni, anziché in N , è sufficiente a giustificare l'uso della mappa di Poincaré.

Teoria del controllo Hamiltoniano

In questo capitolo introdurremo i principi e le idee di base della teoria di controllo Hamiltoniano seguendo il lavoro di Vittot [23, 24] il quale è stato il primo che ha introdotto la suddetta teoria del controllo riferita ai sistemi conservativi. Questa teoria è stata ampiamente applicata in diversi casi dai modelli più semplici ai quelli dei plasmi [25].

2.1 Introduzione al problema

Consideriamo un sistema Hamiltoniano composto dalla parte integrabile H_0 e dalla perturbazione V (di ordine ϵ), chiamato

$$H = H_0 + V.$$

Il nostro obiettivo è di modificare leggermente e globalmente la perturbazione e di creare delle nuove strutture regolari (come i tori invarianti): La prima ipotesi è data in modo da poter costruire il termine di controllo:

Ipotesi 2.1.1. *Sia \mathcal{A} un algebra di Lie. Supponiamo l'esistenza di un operatore $\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ che verifica*

$$\{H\}^2 \Gamma = \{H\}. \quad (2.1.1)$$

Chiameremo questo operatore la *pseudo-inversa* di $\{H\}$. Inoltre, ricordiamo che è impossibile trovare con rigore l'inverso di $\{H\}$ poiché questa funzione ha sempre un nucleo non banale (per esempio $\{H\}H = 0$). Avendo i due operatori $\{H\}$ e Γ , definiamo l'operatore *non-risonante* \mathcal{N} e l'operatore *risonante* \mathcal{R} come segue:

$$\mathcal{N} = \{H\} \Gamma \quad (2.1.2)$$

$$\mathcal{R} = \mathbb{1} - \mathcal{N} \quad (2.1.3)$$

dove $\mathbb{1}$ è l'operatore identità dell'algebra \mathcal{A} .

Notiamo inoltre che l'ipotesi (2.1.1) è equivalente a:

$$\{H\}\mathcal{R} = 0 \quad (2.1.4)$$

e perciò l'immagine di \mathcal{R} è inclusa nel nucleo di $\{H\}$.

Osservazione 3. L'operatore Γ non è unico: per esempio l'addizione di una costante soddisfa di nuovo l'ipotesi (2.1.1). In fatti, qualsiasi operatore della forma

$$\Gamma' = \Gamma + \mathcal{R}\{B\} \quad \forall \{B\} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$$

concorda con l'ipotesi:

$$\{H\}^2\Gamma' = \{H\}^2\Gamma + \{H\}^2\mathcal{R}\{B\} = \{H\}^2\Gamma = \{H\}$$

visto che $\{H\}\mathcal{R} = 0$.

Ciò può consentire una più ampia scelta del controllo in accordo con il problema e l'obiettivo da raggiungere.

Osservazione 4. Se $\{H\}$ e Γ commutano, cioè $\{H\}\Gamma = \Gamma\{H\}$ (questo rafforza leggermente l'ipotesi 2.1.1) allora \mathcal{N} e \mathcal{R} sono proiettori, cioè $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}$ e $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$ e $\text{Ker}\{H\} = \text{Rg}\mathcal{R}$ vale a dire, che abbiamo una descrizione dell'insieme delle costanti del moto. Questo è il caso del seguente esempio.

Un semplice esempio.

Passiamo ora a dare un esempio di come questi operatori agiscono su un caso semplice. Consideriamo un sistema Hamiltoniano H che dipende dalle variabili azione-angolo $(\theta, \mathbf{A}) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ (dove n è il numero di gradi di libertà)¹:

$$H = \omega \cdot \mathbf{A}$$

con vettore di frequenza $\omega \in \mathbb{R}^n$

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{A}}$$

che supponiamo essere costante. Prima di procedere oltre introduciamo il concetto di risonanza.

Definizione 2.1. Il vettore $\omega \in \mathbb{Z}^n$ si chiama risonante se esiste $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ tale che $\omega \cdot \mathbf{k} = 0$.

Definizione 2.2. Il vettore $\omega \in \mathbb{Z}^n$ si chiama non-risonante se e solo se $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ tale che $\omega \cdot \mathbf{k} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} = 0$.

Nel nostro caso abbiamo un vettore delle risonanze ω non-risonante.

Consideriamo che il termine di perturbazione V sia scritto nel suo sviluppo di Fourier

$$V = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} V_{\mathbf{k}} e^{i\theta \cdot \mathbf{k}} \quad (2.1.5)$$

¹Da ora in poi useremo il pedice "0" per identificare l'Hamiltoniana non perturbata, solo là dove sarà indispensabile.

con l'elemento $V_{\mathbf{k}}$ che dipende solamente dall'azione: $V_{\mathbf{k}} = V_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$.

L'operatore $\{H\}$ non è altro che le parentesi di Poisson:

$$\begin{aligned}\{H\}V &= \{H, V\} \\ &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} i\mathbf{k} V_{\mathbf{k}} e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k}}\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

L'operatore Γ non è unico, una possibile scelta è la seguente

$$\Gamma V = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{k} \neq 0}} \frac{V_{\mathbf{k}}}{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}} e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k}}$$

e l'equazione (2.1.1) è soddisfatta visto che

$$\{H\}^2 \Gamma V = \{H, \{H, \Gamma V\}\} = \boldsymbol{\omega} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{k} \neq 0}} i\mathbf{k} V_{\mathbf{k}} e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k}} = \{H\}V.$$

L'operatore \mathcal{N} è costruito assumendo la condizione di non risonanza (2.1.2) dove la condizione $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} \neq 0$ si legge $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. Abbiamo

$$\mathcal{N}V = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{k} \neq 0}} V_{\mathbf{k}} e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k}}$$

oppure equivalentemente

$$\mathcal{N}V = V - V_0.$$

L'operatore \mathcal{R} è finalmente:

$$\mathcal{R}V = V_0.$$

2.2 Teorema del controllo per sistemi Hamiltoniani

Presentiamo ora il teorema principale di questo capitolo e in seguito la sua dimostrazione [23]. Consideriamo un sistema Hamiltoniano composto dalla parte integrabile H e dalla perturbazione V , ambedue elementi di \mathcal{A} . L'obiettivo è quello di definire una *coniugazione*² tra il flusso di $H + \mathcal{R}V$ e il flusso di $H + V + f(V)$ dove il termine $f(V)$ è il termine di controllo. Questo risultato è ottenuto da:

Teorema 2.2.1. *Considerando il quadro appena descritto e l'ipotesi (2.1.1), abbiamo la seguente coniugazione*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{t\{H+V+f(V)\}} = e^{-\{\Gamma V\}} e^{t\{H\}} e^{t\{\mathcal{R}V\}} e^{\{\Gamma V\}}$$

²Con il termine *coniugazione*, in questo caso, si intende che le orbite dell'Hamiltoniana $H + \mathcal{R}V$ e di quella controllata coincidono.

con le funzioni F e $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ definite nel modo seguente:

$$F(V) := e^{-\{\Gamma V\}} \mathcal{R}V + \frac{1 - e^{-\{\Gamma V\}}}{\{\Gamma V\}} \mathcal{N}V \quad (2.2.1)$$

$$f(V) := F(V) - V$$

Il secondo termine nell'equazione (2.2.1) si scrive in serie nella forma seguente:

$$\frac{1 - e^{-\{\Gamma V\}}}{\{\Gamma V\}} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \{\Gamma V\}^k}{(k+1)!}$$

Infatti, usando (1.1.8) si ottiene:

$$\frac{1 - e^{-\{\Gamma V\}}}{\{\Gamma V\}} = \frac{1 - \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \{\Gamma V\}^k}{k!}\right)}{\{\Gamma V\}} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} \{\Gamma V\}^{k-1}}{k!}.$$

Osservazione 5. (La dimensione del termine di controllo) Al primo ordine, con lo sviluppo di cui sopra, avremo

$$F(V) = \mathcal{R}V + \mathcal{N}V + \mathcal{O}(V^2) = V + \mathcal{O}(V^2)$$

così,

$$f(V) = V - V + \mathcal{O}(V^2) = \mathcal{O}(V^2)$$

Il controllo è piccolo in confronto con la perturbazione V (presumibilmente piccola rispetto alla parte integrabile H), che è significativo rispetto agli obiettivi del controllo: modificare leggermente un sistema, non costruirne uno diverso! Una dimostrazione più dettagliata della grandezza di $f(V)$ è data in [23].

Per ragioni pratiche, scriviamo $f(V)$ in forma di serie:

$$f(V) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \{\Gamma V\}^k}{(k+1)!} (k\mathcal{R}V + V) \quad (2.2.2)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f(V) &= F(V) - V \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \{\Gamma V\}^k}{k!} \mathcal{R}V + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \{\Gamma V\}^k}{(k+1)!} \mathcal{N}V - V \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{(-1)^k \{\Gamma V\}^k}{(k+1)!} (k+1) \mathcal{R}V + \frac{(-1)^k \{\Gamma V\}^k}{(k+1)!} \mathcal{N}V \right) + \underbrace{\mathcal{R}V + \mathcal{N}V - V}_{=0} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \{\Gamma V\}^k}{(k+1)!} (k\mathcal{R}V + V). \end{aligned}$$

E' interessante notare che se $\mathcal{R}V = 0$, il sistema Hamiltoniano controllato $H + V + f(V)$ è canonicamente coniugato con H e f prende la forma:

$$f = \sum_{k=2}^{\infty} f_k, \quad f_k = -\frac{1}{k} \{\Gamma V\} f_{k-1} \quad \text{con } f_1 = V \quad (2.2.3)$$

Notare che f_k è di ordine $\mathcal{O}(V^k)$.

Per la dimostrazione del Teorema 2.2.1 useremo i lemmi 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4 del capitolo precedente insieme con il lemma seguente:

Lemma 2.2.2.

$$\forall V \in \mathcal{A} \quad H + F(V) = e^{-\{\Gamma V\}}(H + \mathcal{R}V) \quad (2.2.4)$$

Dimostrazione. Dalla definizione (2.2.1) e dalla proprietà antisimmetrica delle parentesi di Poisson (1.1.4) abbiamo:

$$\begin{aligned} F(V) - e^{-\{\Gamma V\}} \mathcal{R}V &= \frac{1 - e^{-\{\Gamma V\}}}{\{\Gamma V\}} \{H\} \Gamma V \\ &= \frac{1 - e^{-\{\Gamma V\}}}{\{\Gamma V\}} (-\{\Gamma V\} H) \\ &= e^{-\{\Gamma V\}} H - H \end{aligned}$$

□

Dimostrazione. (del Teorema 2.2.1) Entrambi i membri di (2.2.4) sono elementi di \mathcal{A} e quindi avremo:

$$\begin{aligned} \{H + F(V)\} &= \{e^{-\{\Gamma V\}}(H + \mathcal{R}V)\} \\ &\stackrel{(1.2.2)}{=} e^{-\{\Gamma V\}} \{H + \mathcal{R}V\} e^{\{\Gamma V\}}. \end{aligned}$$

I flussi da entrambe le parti sono identici e $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp(t\{H + F(V)\}) &= \exp(e^{-\{\Gamma V\}} t \{H + \mathcal{R}V\} e^{\{\Gamma V\}}) \\ &\stackrel{(1.2.4)}{=} e^{-\{\Gamma V\}} e^{t\{H + \mathcal{R}V\}} e^{\{\Gamma V\}} \end{aligned}$$

Infine, tenendo conto dell'ipotesi (2.1.1) espressa tramite l'operatore \mathcal{R} e usando l'identità di Jacobi (1.1.5) segue che:

$$\{H\}\{\mathcal{R}V\} - \{\mathcal{R}V\}\{H\} = \{\{H\}\mathcal{R}V\} = 0.$$

Con questa si intende che $\{H\}$ e $\{\mathcal{R}V\}$ commutano in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ e segue che:

$$e^{t\{H + \mathcal{R}V\}} = e^{t\{H\}} e^{t\{\mathcal{R}V\}}.$$

Così si ha la tesi. □

Il flusso del nuovo sistema Hamiltoniano $H + V + f(V)$ è coniugato al flusso di $H + \mathcal{R}V$. Questo assicura che i due sistemi condividono la stessa dinamica. Perché una parte della perturbazione è stata rimossa ($V = \mathcal{R}V + \mathcal{N}V \rightarrow \mathcal{R}V$), ci aspettiamo una nuova dinamica più regolare, e meno caotica³. Un esempio completo verrà trattato per il caso del controllo del pendolo forzato.

³Nel senso delle regolarità delle orbite nello spazio delle fasi.

2.2.1 Controllo dell'ordine superiore

È possibile costruire termini di ordine superiore, vale a dire, termini di controllo d'ordine $\mathcal{O}(V^k)$ con $k > 2$. Questo può essere ottenuto in diversi modi (soprattutto considerando la non unicità dell'operatore Γ). Daremo qui un esempio assumendo la condizione di non risonanza, cioè $\mathcal{R}V = 0$. Il sistema Hamiltoniano controllato dove si mette in evidenza l'ordine della perturbazione e del controllo fattorizzando esplicitamente V e f con ϵ e ϵ^2 rispettivamente, si legge:

$$H_c = H + \epsilon V + \epsilon^2 f$$

Questo sistema Hamiltoniano è quasi-integrabile. Così il nostro sistema iniziale Hamiltoniano $H + \epsilon V$ può essere riscritto come

$$H + \epsilon V + \epsilon^2 f - \epsilon^2 f = \tilde{H} + \tilde{V}.$$

con le sostituzioni $\tilde{H} = H_c$ e $\tilde{V} = -\epsilon^2 f$. Consideriamo anche:

$$\tilde{\Gamma} = e^{-\epsilon\{\Gamma V\}} \Gamma e^{\epsilon\{\Gamma V\}}$$

che verifica l'ipotesi (2.1.1) poiché vale (2.2.4). Abbiamo quindi soddisfatto le condizioni per applicare il teorema (2.2.1) ed abbiamo ottenuto il termine di controllo $\epsilon^4 g$ che soddisfa:

$$H + \epsilon V + \epsilon^4 g = e^{-\epsilon^2\{\tilde{\Gamma} f\}} \left(H_c - \epsilon^2 \tilde{\mathcal{R}} f \right)$$

con $\tilde{\mathcal{R}}$ l'operatore risonante definito come $\tilde{\mathcal{R}} = 1 - \{H_c\}\tilde{\Gamma}$. Potremmo iterare questa procedura per ottenere ulteriori ordini superiori.

2.3 Esempio: Il controllo del modello del pendolo forzato

Consideriamo il seguente sistema Hamiltoniano

$$H(x, p; t) = \frac{1}{2} p^2 + \epsilon (\cos x + \cos(x - t)) \quad (2.3.1)$$

che modella il pendolo forzato. Prima di continuare oltre vogliamo mettere in evidenza che al fine di presentare dei risultati numerici, è opportuno usare degli integratori numerici particolari (detti anche integratori simplettici) che conservano le proprietà geometriche dei sistemi Hamiltoniani (vedi Appendice A).

Il disegno della sezione di Poincaré di (2.3.1) è stato dato nella Figura 2.1 per valori diversi del parametro ϵ . Possiamo notare che diversi tori KAM (vedi Capitolo 1) si conservano per valori piccoli di ϵ (come per esempio 0.008 oppure 0.017) mentre le orbite caotiche nascono con l'aumento del parametro ($\epsilon = 0.034$ o 0.065). Infatti, è stato dimostrato in [26] che tutti i tori invarianti (KAM), spariscono quando $\epsilon \geq 0.02759$. Costruiamo ora il sistema Hamiltoniano autonomo. A questo scopo si considera il tempo t come un altro angolo (che denotiamo con τ) che ha come azione coniugata E . L'Hamiltoniana (2.3.1) diventa:

$$H(x, \tau, p, E) = \frac{1}{2} p^2 + E + \epsilon (\cos x + \cos(x - \tau)) \quad (2.3.2)$$

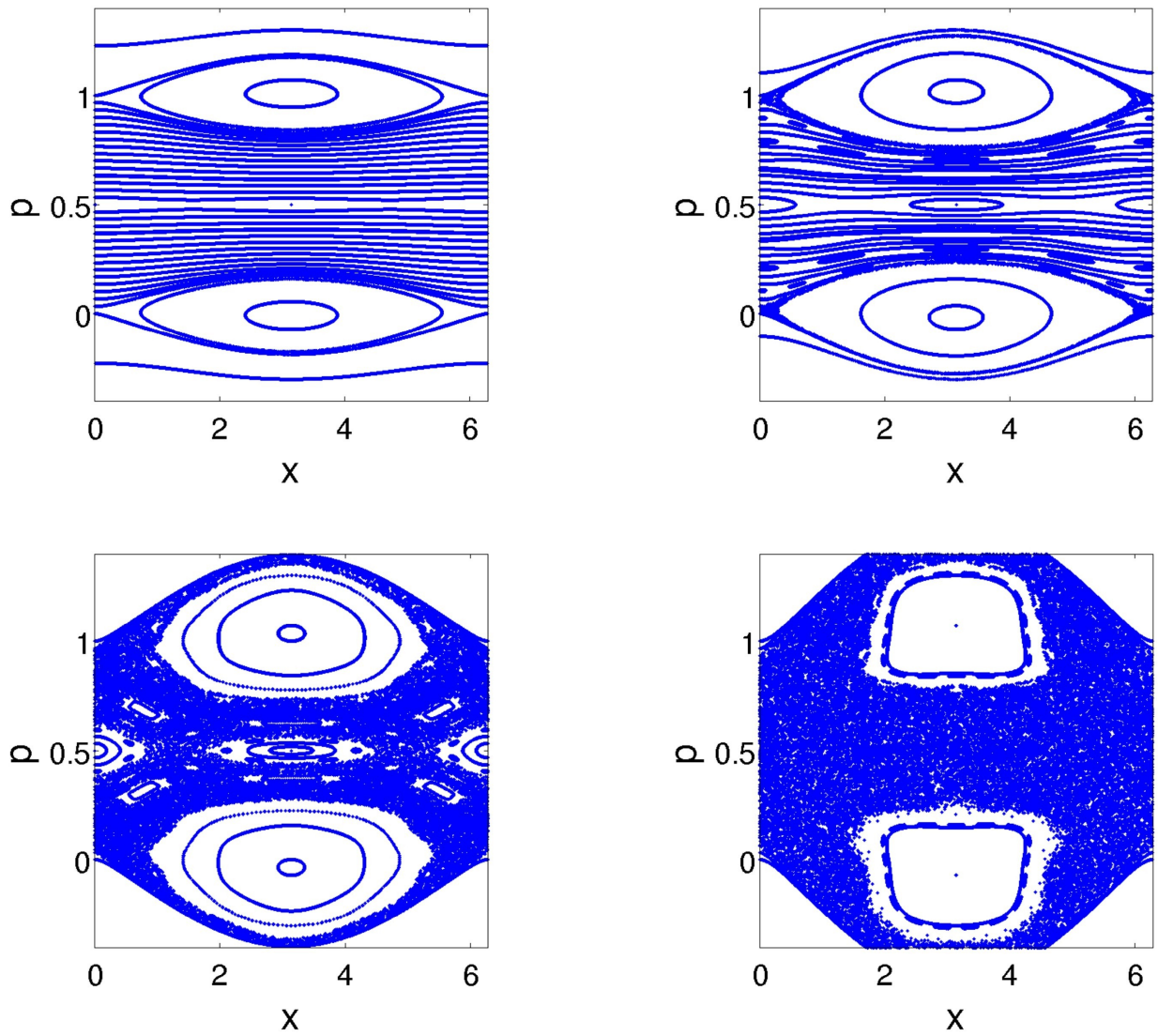


Figura 2.1: Sezioni di Poincaré del sistema Hamiltoniano (2.3.1) per $\epsilon = 0.008$, $\epsilon = 0.017$, $\epsilon = 0.034$ e $\epsilon = 0.065$ rispettivamente da su in giù e da sinistra a destra. (Figura riprodotta da [33]).

dove gli angoli sono $\theta = (x, \tau)$ e le azioni sono $\mathbf{A} = (p, E)$. La parte integrabile è:

$$H(-, -, p, E) = \frac{1}{2}p^2 + E \quad (2.3.3)$$

dove le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{\tau} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{E} = -\frac{\partial H}{\partial \tau} = 0 \end{cases}$$

e le soluzioni seguono semplicemente:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + p_0 t \\ \tau = t \\ p(t) = p_0 \\ E = E_0. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Così per $\epsilon = 0$, abbiamo una conoscenza completa del sistema e le soluzioni sono tori invarianti. La perturbazione è (ritornando adesso alla notazione della variabile t)

$$V(x, t, p, E) = \epsilon (\cos x + \cos(x - t))$$

che abbiamo bisogno di esprimere nella sua forma di Fourier per applicare gli operatori definiti precedentemente in questo capitolo. Utilizzando la relazione nota

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

scriviamo

$$V(x, t, p, E) = \frac{\epsilon}{2} (e^{ix} + e^{-ix} + e^{i(x-t)} + e^{-i(x-t)})$$

ed avremo la giusta forma come in (2.1.5) con $n = 2$, $k = (k_1, k_2)$ e

$$V_{k_1, k_2} = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2} & \text{se } (k_1, k_2) \in \{(1, 0), (-1, 0), (1, -1), (-1, 1)\} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

che ci permette di calcolare i quattro operatori con la perturbazione definita come:

$$V = \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}} V_{k_1, k_2}(p, E) e^{i(k_1 x + k_2 t)}.$$

Il vettore delle frequenze è $\omega = (p, 1)$ e quindi gli operatori agiscono su una qualsiasi funzione $U \in \mathcal{A}$ della forma:

$$U(x, t, p, E) = \sum_{k_1, k_2} U_{k_1, k_2}(p, E) e^{i(k_1 x + k_2 t)}$$

come

$$\{H\}U = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} i(pk_1 + k_2) U_{k_1, k_2}(p, E) e^{i(k_1 x + k_2 t)} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma U &= \sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ pk_1 + k_2 \neq 0}} \frac{U_{k_1, k_2}(p, E)}{i(pk_1 + k_2)} e^{i(k_1 x + k_2 t)} \\
\mathcal{N}U &= \sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ pk_1 + k_2 \neq 0}} U_{k_1, k_2}(p, E) e^{i(k_1 x + k_2 t)} \\
\mathcal{R}U &= \sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ pk_1 + k_2 = 0}} U_{k_1, k_2}(p, E) e^{i(k_1 x + k_2 t)}. \tag{2.3.6}
\end{aligned}$$

Applicando questi operatori alla funzione V troviamo:

$$\begin{aligned}
\{H\}V &= -\epsilon (p \sin x + (p-1) \sin(x-t)) \\
\Gamma V &= \epsilon \left(\frac{1}{p} \sin x + \frac{1}{(p-1)} \sin(x-t) \right), \quad p \neq 0, 1 \\
\mathcal{N}V &= \epsilon (\cos x + \cos(x-t)) = V \\
\mathcal{R}V &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Poiché $\mathcal{R}V = 0$, possiamo usare le semplificazioni e le notazioni di (2.2.3) e calcolare i termini della serie f ricorsivamente. Questo termine è:

$$f_2 = -\frac{1}{2} \{\Gamma V\}V = -\frac{1}{2} \frac{\partial(\Gamma V)}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial x},$$

poiché V non dipende da p . Calcoliamo ora f_2 esplicitamente:

$$f_2 = -\frac{\epsilon^2}{2} (\sin x + \sin(x-t)) \left(\frac{\sin x}{p^2} + \frac{\sin(x-t)}{(p-1)^2} \right), \quad p \neq 0, 1.$$

Gli altri termini della serie si possono trovare nello stesso modo. Ma visto che essi sono in un numero infinito allora non possiamo mai calcolare f in modo perfettamente esatto. Presentiamo ora due modi per oltrepassare questa difficoltà.

Una prima possibile semplificazione è quella di restringere la somma al suo primo termine precedentemente calcolato: f_2 . Grosso modo questo termine è più grande paragonato con gli altri termini visto che $f_k = \mathcal{O}(V^k)$ e approssimando le dimensioni di V con un ϵ piccolo, $|\epsilon| \ll 1$, segue che f_2 è il termine principale.

Quindi, fissiamo un valore di p nel termine di controllo f_2 che denotiamo con p^* . Il sistema hamiltoniano $V + f_2$ è adesso indipendente dalle azioni, possiamo calcolare esplicitamente $e^{t(V+f_2)}$ e usare lo schema simplettico per calcolare l'Hamiltoniana controllata

$$H + V + f_2|_{p=p^*}. \tag{2.3.8}$$

Presentiamo i risultati nella Figura 2.2 che è il grafico equivalente della Figura 2.1 con l'aggiunta del termine di controllo $f_2|_{p=p^*}$. Come si può vedere dall'operatore ΓV (vedi l'eq. (2.3.8)), oppure nel termine di controllo, le prime risonanze si trovano intorno ai valori di $p = 0$ e $p = 1$. Per questa ragione, scegliamo $p^* = 1/2$ come valore intermedio fra le due risonanze. La sezione di Poincaré come si può osservare è più regolare e possiamo notare la ricostruzione dei tori invarianti quando $\epsilon = 0.034$

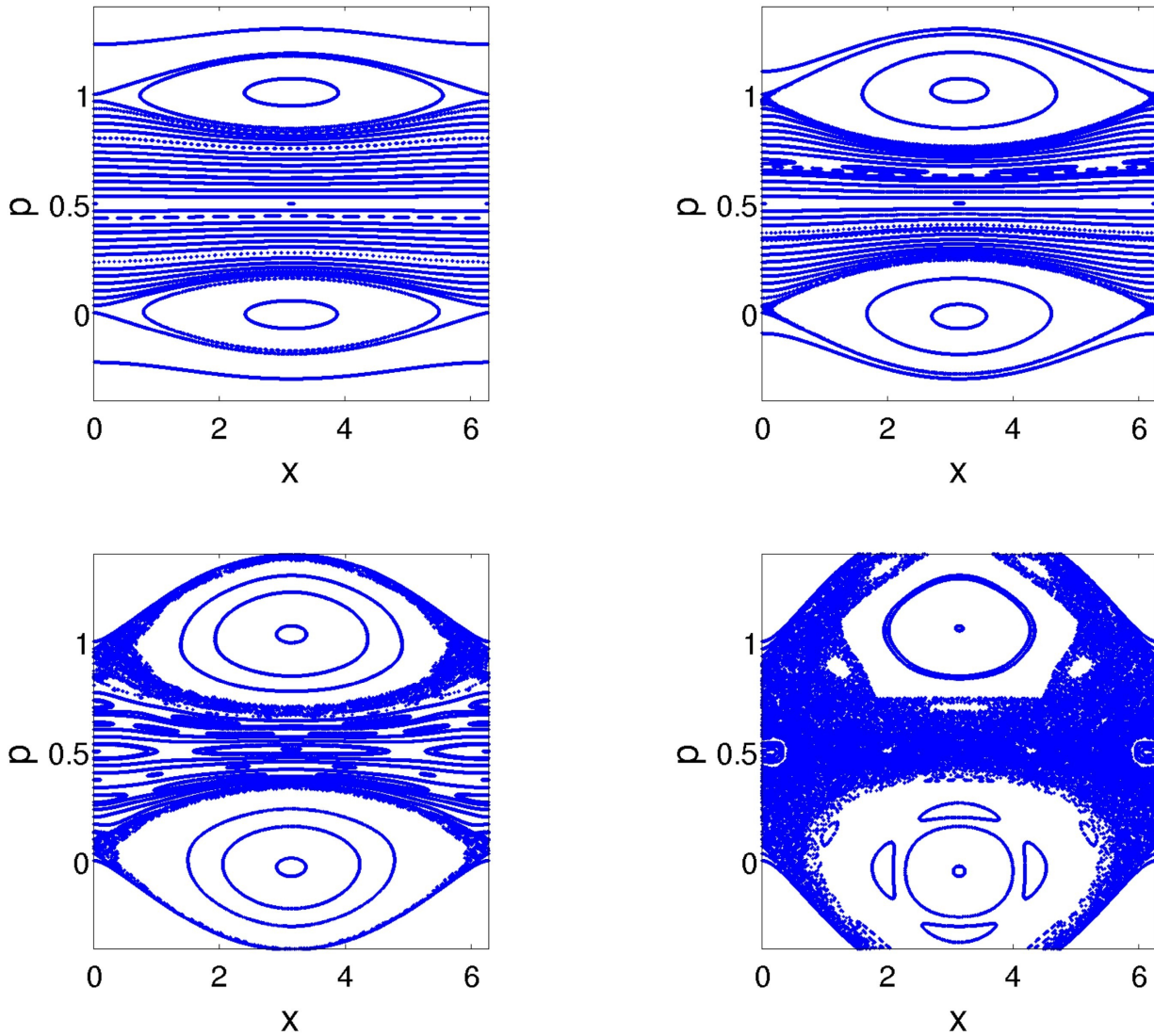


Figura 2.2: Sezioni di Poincaré del sistema Hamiltoniano controllato (2.3.8) per $\epsilon = 0.008$, $\epsilon = 0.017$, $\epsilon = 0.034$ e $\epsilon = 0.065$ rispettivamente da su in giù e da sinistra a destra. (Figura riprodotta da [33]).

al contrario con il caso del sistema Hamiltoniano non controllato quando nessuno rimane presente per lo stesso valore di ϵ . Un ingrandimento intorno a $p = 1/2$ è stato dato nella Figura 2.3 per $\epsilon = 0.034$ nel caso non controllato (sopra) e quello controllato (sotto). Chiaramente vediamo un miglioramento e la ricomparsa dei tori invarianti.

Un altro modo per affrontare i problemi inerenti legati alla computazione dei termini di controllo si può risolvere facendo una traslazione di ω nella variabile p in tal modo che la parte integrabile venga considerata lineare nell'azione:

$$H = E + \omega p$$

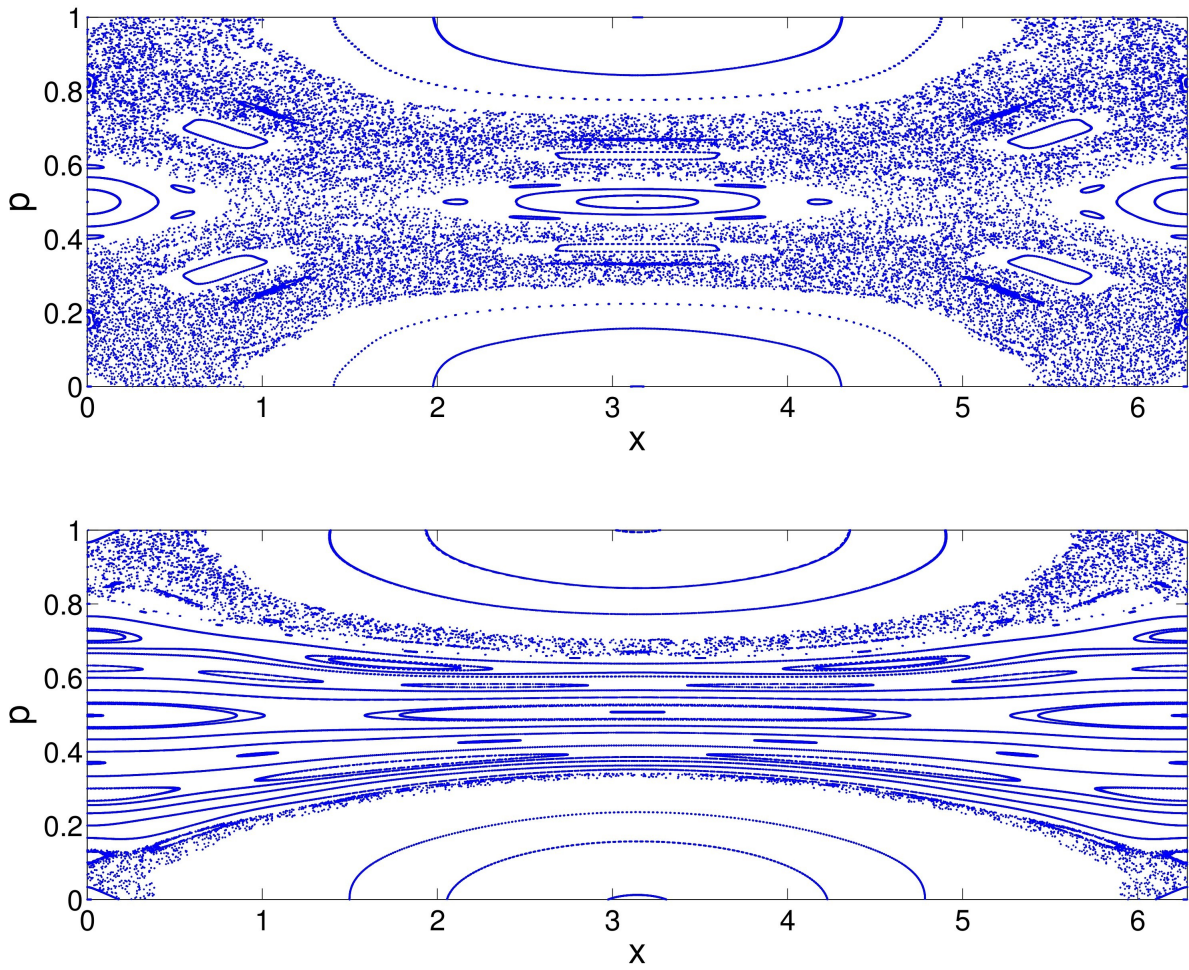


Figura 2.3: Confronto delle sezioni di Poincaré del sistema Hamiltoniano perturbato (2.3.1) (in alto) e quello controllato (2.3.8) (in basso) per $\epsilon = 0.034$ e $p^* = 1/2$. (Figura riprodotta da [33]).

e la perturbazione diventa

$$V = \epsilon (\cos x + \cos(x - t)) + \frac{p^2}{2}.$$

Usando gli operatori definiti dalle equazioni (2.3.5), (2.3.6) troviamo:

$$\begin{aligned} \{H\}V &= -\epsilon(\omega \sin x + (\omega - 1)\sin(x - t)) \\ \Gamma V &= \epsilon \left(\frac{1}{\omega} \sin x + \frac{1}{(\omega - 1)} \sin(x - t) \right) \\ \mathcal{N}V &= \epsilon (\cos x + \cos(x - t)) \\ \mathcal{R}V &= \frac{p^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

con $\omega \leq 0, 1$ (scelto numero irrazionale). Calcoliamo ora il termine di controllo usando la formula (2.2.2). Infatti, i termini della serie (2.2.2) si annullano per $k \geq 3$

poiché V and $\mathcal{R}V$ sono quadratici in p mentre ΓV non dipende in p così che dopo due iterazioni $\{\Gamma V\}(k\mathcal{R}V + V) = 0$. Quindi il risultato del termine di controllo è:

$$f(p, x, t) = -\frac{1}{2}\{\Gamma V\}(\mathcal{R} + 1)V + \frac{1}{6}\{\Gamma V\}^2(2\mathcal{R} + 1)V \quad (2.3.10)$$

Dopo alcuni risultati si ricava:

$$f = \epsilon p \left(\frac{\cos x}{\omega} + \frac{\cos(x-t)}{\omega-1} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\cos x}{\omega} + \frac{\cos(x-t)}{\omega-1} \right)^2.$$

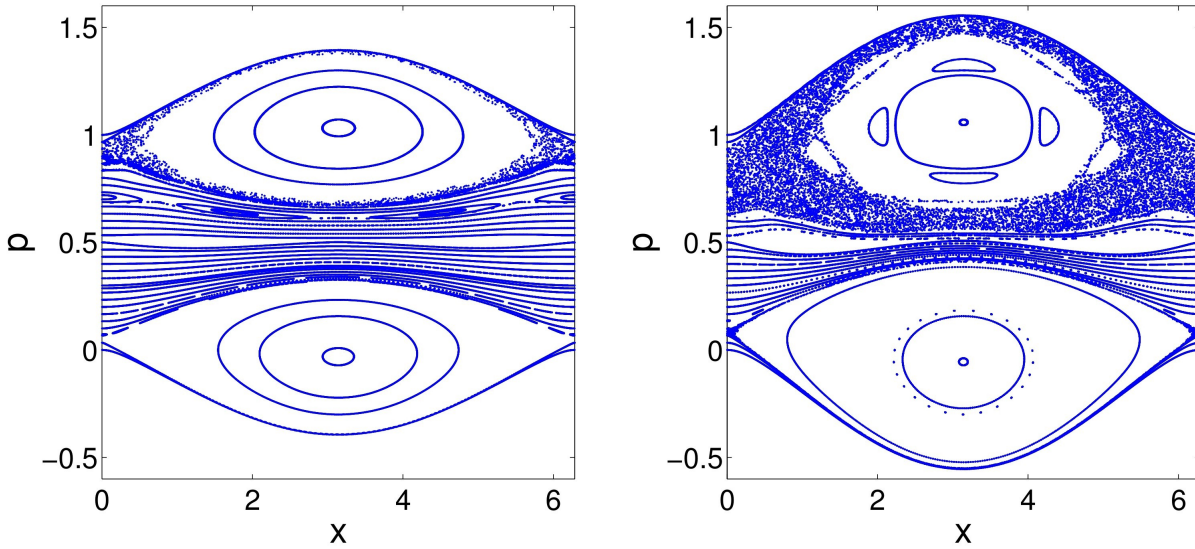


Figura 2.4: Sezioni di Poincaré del sistema Hamiltoniano controllato (2.3.11) per $\epsilon = 0.034$ (a sinistra) e $\epsilon = 0.065$ (a destra) e $\omega = (3 + \sqrt{5})/2$. (Figura riprodotta da [33]).

Vediamo subito i vantaggi di questo metodo: siamo stati in grado di calcolare esattamente il termine di controllo. Dall'altra parte, il termine di controllo è di ordine ϵ , quindi dello stesso ordine come la perturbazione. Usiamo lo stesso "trucco" come abbiamo fatto prima per avere dei sistemi Hamiltoniani computabili dagli integratori simplettici: mettiamo $p = 0$ nel termine di controllo. Facendo questa manipolazione, il controllo è dell'ordine ϵ^2 e l'Hamiltoniana, scritta con i momenti originali, è

$$\frac{1}{2}p^2 + \epsilon(\cos x + \cos(x-t)) + \epsilon^2 \left(\frac{\cos x}{\omega} + \frac{\cos(x-t)}{\omega-1} \right)^2. \quad (2.3.11)$$

Il valore di ω si sceglie irrazionale per evitare problemi di risonanza. Nel nostro esempio è stato fissato a $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Le sezioni di Poincaré di questo sistema Hamiltoniano sono presentate nella Figura 2.4. Il caos è stato notevolmente ridotto e un numero significativo di tori invarianti sono stati ricostruiti. Anche se gli spazi delle fasi presentati nella Figura 2.4 presentano una forma più regolare rispetto a quelle della Figura 2.2, non significa che l'ultimo metodo usato è il migliore: abbiamo fatto diverse approssimazioni

e troncamenti perciò il controllo non è quello previsto dal teorema. Il termine di controllo dovrebbe essere scelto secondo il problema studiato e dei vincoli inerenti.

Modello di Kuramoto

Il modello di Kuramoto descrive la dinamica di sincronizzazione di una grande popolazione di oscillatori accoppiati in cui le frequenze naturali sono state scelte da una qualche distribuzione prestabilita [13–15, 34]. Se la costante di accoppiamento supera una certa soglia, il sistema presenta una transizione di fase: alcuni degli oscillatori sono spontaneamente sincronizzati, mentre altri rimangono incoerenti. In questo capitolo descriveremo i risultati principali legati alla ricerca sul modello di Kuramoto, mettendo in evidenza l'analisi legata alla transizione verso la sincronizzazione. Come vedremo il problema posto da questo modello coinvolge diversi rami della matematica e fisica come la biomatematica, fisica statistica, teoria cinetica, teoria della biforcazione, e la fisica del plasma.

3.1 Introduzione

Il modello di Kuramoto è stato originariamente motivato dal fenomeno della sincronizzazione collettiva, in cui un enorme sistema di oscillatori si sincronizza spontaneamente ad una certa frequenza comune, nonostante le inevitabili diverse frequenze naturali dei singoli oscillatori [11, 12]. Tra i vari esempi in biologia ci sono reti di cellule di pacemaker nel cuore [3]; cellule di pacemaker circadiano nel nucleo soprachiasmatico del cervello (dove le frequenze individuali delle cellule sono state osservate per la prima volta [4]); congregazioni di lucciole che lampeggiano in modo sincrono [1]; e grilli che cantano all'unisono [2]. Ci sono altrettanti esempi in fisica ed ingegneria, da un insieme di laser [6] ed oscillatori di microonde [7] alle giunzioni dei superconduttori di Josephson [8, 9].

La sincronizzazione collettiva è stata studiata matematicamente da Wiener [35], che ha riconosciuto la sua ubiquità in Natura, e che ha ipotizzato che essa poteva essere coinvolta anche nella generazione di ritmi alfa nel cervello. Purtroppo l'approccio matematico di Wiener basato sugli integrali di Fourier si è rivelato in seguito essere un vicolo cieco.

Un approccio più fruttuoso è stato proposto da Winfree [11] nel suo primo articolo, poco prima di essersi laureato. Lui formulò il problema in termini di una grande

popolazione di oscillatori interagenti. Come detto prima, il problema sarebbe intrattabile esattamente, ma Winfree intuitivamente si è accorto che delle semplificazioni potessero verificarsi se l'accoppiamento era debole e gli oscillatori quasi identici. Poi si può sfruttare una separazione delle scale dei tempi: su una scala di tempo veloce, gli oscillatori si rilassano nelle loro frequenze, e così possono essere caratterizzati unicamente dalle loro fasi; su una scala di tempo lunga, queste fasi evolvono a causa dell'interazione fra l'accoppiamento debole e le piccole differenze in frequenza tra gli oscillatori. In un'ulteriore semplificazione, Winfree ha presunto che ogni oscillatore fosse accoppiato ad una collezione di ritmi generati da tutta la popolazione degli oscillatori, analogamente ad un'approssimazione di campo medio in fisica. Il suo modello è:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left(\sum_j^N X(\theta_j) Z(\theta_i) \right), \quad i = 1, \dots, N$$

dove θ_i denota la fase del oscillatore i e ω_i è la sua frequenza.

Ogni oscillatore j esercita un'influenza fase-dipendente $X(\theta_j)$ su tutti gli altri; la risposta corrispondente dell'oscillatore i dipende dalla sua fase θ_i , attraverso la funzione di sensibilità $Z(\theta_i)$.

Utilizzando le simulazioni numeriche e le approssimazioni analitiche, Winfree ha scoperto che tali popolazioni di oscillatori potevano manifestare l'analogo temporale di una transizione di fase. Quando la varianza della distribuzione delle frequenze naturali è grande rispetto all'accoppiamento, il sistema si comporta incoerentemente, ed ogni oscillatore gira nella sua frequenza naturale. Mentre la varianza diminuisce, l'incoerenza persiste fino a quando viene attraversata una certa soglia, allora un piccolo gruppo di oscillatori entra in sincronia.

Questo fenomeno cooperativo a quanto pare ha fatto una profonda impressione su Kuramoto. Come scriveva in un suo articolo ([36], p. 570):

"... Prigogine's concept of time order [37], which refers to the spontaneous emergence of rhythms in nonequilibrium open systems, found its finest example in this transition phenomenon... It seems that much of fresh significance beyond physiological relevance could be derived from Winfree's important finding (in 1967) after our experience of the great advances in nonlinear dynamics over the last two decades."

Kuramoto ha iniziato a lavorare sulla sincronizzazione collettiva nel 1975. Il suo primo articolo sull'argomento [13] è stato una breve nota dove si annunciano alcuni risultati esatti su ciò che sarebbe successivamente stato chiamato il modello di Kuramoto. Negli anni successivi, egli ha insistito a raffinare e chiarire la presentazione di volta in volta, ma anche ponendo spesso nuove domande [14].

3.2 Modello di Kuramoto

Kuramoto [14] ha posto l'intuizione di Winfree sui modelli di fase su basi più solide. Egli ha usato un approccio perturbativo per dimostrare che per qualsiasi sistema debolmente accoppiato di oscillatori quasi identici, la dinamica a lungo termine viene descritta dalle equazioni di fase della seguente forma universale:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N$$

Dove $\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i)$ è la funzione d'interazione fra gli oscillatori i e j . Anche se la riduzione in un modello di fase rappresenta un'enorme semplificazione, queste equazioni sono ancora troppo complicate da essere analizzate nella loro forma generale, poiché le funzioni di interazione potrebbero corrispondere a delle espressioni molto complicate e la topologia di connessione è non specificata: gli oscillatori possono essere collegati in una catena, un anello, un reticolo cubico, un grafo casuale, o una qualsiasi altra topologia.

Come Winfree, Kuramoto ha riconosciuto che il caso del campo medio dovrebbe essere più trattabile. Il *modello di Kuramoto* corrisponde al più semplice caso di un accoppiamento puramente sinusoidale, tutti-con-tutti, ugualmente pesati:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

dove $K \geq 0$ è il coefficiente di accoppiamento e il fattore $\frac{1}{N}$ assicura che il modello si comportata bene quando $N \rightarrow \infty$.

Le frequenze ω sono distribuite secondo una certa densità di probabilità $g(\omega)$. Per semplicità, Kuramoto presunse che $g(\omega)$ è unimodale e simmetrica sulla sua frequenza media, cioè, $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$ per tutti gli ω , come una distribuzione Gaussiana. In effetti, grazie alla simmetria rotazionale nel modello, noi possiamo impostare una frequenza media $\Omega = 0$, ridefinendo $\theta_i \rightarrow \theta_i + \Omega t$ per ogni i , che corrisponde a considerare un sistema di riferimento rotante centrato in Ω . Questo lascia le equazioni

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.1)$$

invarianti, ma effettivamente sottraendo Ω per tutti gli ω_i e quindi spostando la media di $g(\omega)$ in zero. Quindi, da ora in poi

$$g(\omega) = g(-\omega)$$

per tutti gli ω e ω_i denota la deviazione dalla frequenza media Ω . Supporremo anche che $g(\omega)$ sia non crescente in $[0, \infty)$, nel senso che $g(\omega) \geq g(v)$ quando $\omega \leq v$; questo formalizza ciò che chiamiamo "unimodale".

3.2.1 Parametro d'ordine

Per visualizzare la dinamica della fase, è conveniente immaginare, tanti punti che ruotano intorno al cerchio unitario nel piano complesso. Il parametro d'ordine complesso è definito da:

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (3.2.2)$$

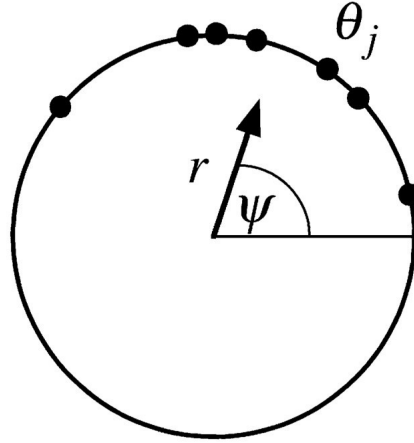


Figura 3.1: Una interpretazione geometrica del parametro d'ordine (3.2.2). Le fasi θ_j sono rappresentati nel cerchio unitario. Il loro baricentro è dato dal numero complesso $re^{i\psi}$, mostrato come una freccia.

è una grandezza macroscopica che può essere interpretata come una collezione di ritmi prodotta da tutta la popolazione. Questo corrisponde al baricentro delle fasi. Il raggio $r(t)$ misura la coerenza di fase, e $\psi(t)$ è la media delle fasi (Figura 3.1).

Per esempio, se tutti gli oscillatori si muovono in un singolo gruppo stretto, abbiamo $r \approx 1$ e la popolazione agisce come un oscillatore gigante. D'altra parte, se gli oscillatori sono sparsi intorno al cerchio, allora $r \approx 0$; le singole oscillazioni si uniscono incoerentemente e nessun ritmo macroscopico viene prodotto.

Kuramoto ha notato che l'equazione governante 3.2.1 può essere riscritta in termini del parametro d'ordine, come segue. Moltiplichiamo entrambi i lati della (3.2.2) per $e^{-i\theta_i}$ in modo da ottenere

$$re^{i(\psi-\theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j-\theta_i)}.$$

Uguagliando le parti immaginarie si ha

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i).$$

Così l'equazione (3.2.1) diventa:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.3)$$

In questa forma, il carattere di campo medio del modello diventa evidente. Ogni oscillatore sembra essere disaccoppiato da tutti gli altri oscillatori, anche se naturalmente stanno interagendo fra di loro, ma solo attraverso le quantità di campo medio r e ψ . In particolare, la fase di θ_i è attratta verso la fase media ψ , piuttosto che verso la fase di un oscillatore individuale. Inoltre, la forza effettiva dell'accoppiamento è proporzionale alla coerenza r . Questa proporzionalità stabilisce un feedback positivo tra l'accoppiamento e la coerenza: come la popolazione diventa più coerente, r cresce

e così l'accoppiamento efficace Kr aumenta, e tende ad acquisire ancora più oscillatori dentro il gruppo sincronizzato. Se la coerenza aumenta ulteriormente dai nuovi oscillatori acquisiti, il processo continuerà; altrimenti, diventa autolimitante. Winfree [11] è stato il primo a scoprire questo meccanismo sulla base della sincronizzazione spontanea, ma si comprende in modo chiaro soprattutto nel modello di Kuramoto.

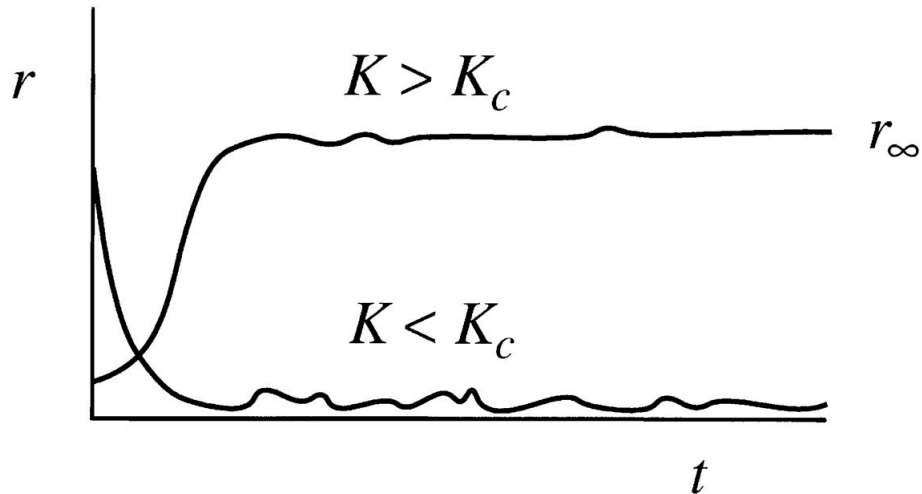


Figura 3.2: Un'illustrazione schematica di una evoluzione tipica di $r(t)$ che si vede dalle simulazioni numeriche del modello di Kuramoto. (Figura riprodotta da [15].)

3.2.2 Le simulazioni numeriche

Se integriamo il modello di Kuramoto numericamente, allora come evolverà $r(t)$? Per concretezza, supponiamo di aver fissato una Gaussiana $g(\omega)$ o qualche altra densità, e variamo il coefficiente di accoppiamento K . Le simulazioni mostrano che per tutti i K più piccoli di un certo valore di soglia K_c , gli oscillatori agiscono come se fossero disaccoppiati: le fasi diventano uniformemente distribuite intorno al cerchio, partendo da una qualsiasi condizione iniziale. Poi $r(t)$ decade in un piccolo valore dell'ordine $O(N^{-1/2})$, come previsto per un qualsiasi distribuzione casuale di N punti su un cerchio (Figura 3.2).

Ma quando K supera il valore di soglia K_c , questo stato incoerente diventa instabile e $r(t)$ inizia a crescere esponenzialmente, riflettendo il formarsi di un piccolo gruppo di oscillatori che sono reciprocamente sincronizzati, generando così una oscillazione collettiva. Alla fine $r(t)$ si satura ad un certo livello di $r_\infty < 1$, anche se ancora con fluttuazioni dell'ordine $O(N^{-1/2})$.

A livello dei singoli oscillatori, si trova che la popolazione si divide in due gruppi: gli oscillatori vicino al centro della distribuzione delle frequenze si agganciano insieme alla frequenza media Ω e ruotano insieme con una fase media $\psi(t)$, invece quelli nelle code ruotano vicino alle loro frequenze naturali e rimangono sempre fuori dal cluster della sincronizzazione. Questo stato misto è spesso chiamato *parzialmente sincronizzato*. Con ulteriore aumento di K , sempre più oscillatori sono reclutati nel cluster sincronizzato e r_∞ cresce come mostrato in Figura 3.3.

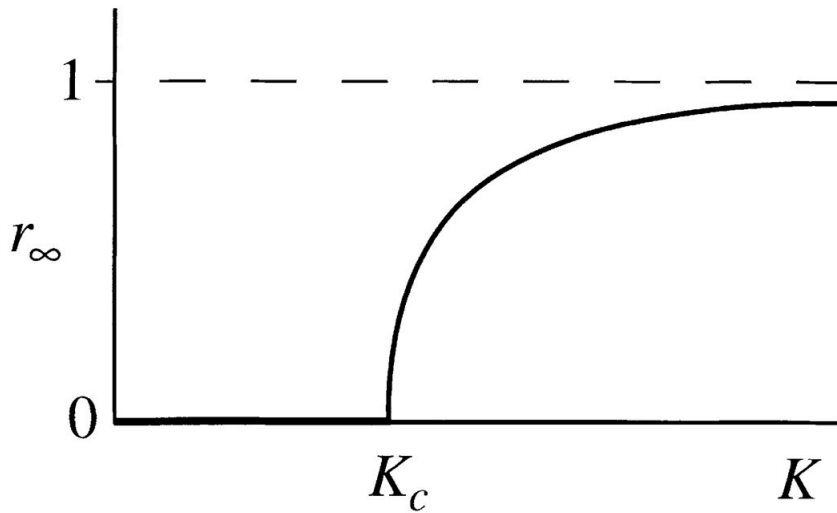


Figura 3.3: Dipendenza della coerenza dello stato stazionario r_∞ dal coefficiente d'accoppiamento K . (Figura riprodotta da [15].)

I dati numerici suggeriscono inoltre che r_∞ dipende solo da K , e non dalle condizioni iniziali. In altre parole, sembra che esista un attrattore globale per ogni valore di $K > K_c$.

3.2.3 Problemi aperti

I risultati numerici descritti sopra hanno bisogno di una spiegazione. Una buona teoria dovrebbe fornire delle formule per determinare esplicitamente il valore dell'accoppiamento critico K_c e la coerenza $r_\infty(K)$ sul ramo di biforcazione. La teoria dovrebbe spiegare anche la stabilità apparente del ramo zero sotto la soglia e del ramo di biforcazione sopra la soglia. Idealmente, si vorrebbe formulare e dimostrare i risultati della stabilità *globale*, dal momento che le simulazioni numeriche non danno qualche traccia di altri attrattori oltre a quelli visti qui. Detto in modo ancora più ambizioso, si può formulare e dimostrare qualche risultato di convergenza quando $N \rightarrow \infty$?

Come vedremo in seguito, alcuni dei questi problemi sono stati risolti, mentre altri rimangono ancora aperti. Specificamente, Kuramoto ha derivato dei risultati esatti per K_c e $r_\infty(K)$ [13]. Inoltre Mirollo e Strogatz [16, 17] hanno risolto il problema della stabilità lineare per il ramo zero e Crawford [38] ha successivamente esteso questo risultato per il caso debolmente non lineare. Però ancora rimane un mistero come dimostrare che il ramo della stabilità è linearmente stabile per tutta la sua esistenza (se lo è veramente), e soprattutto nessuno ha mai trattato i problemi della stabilità globale e della convergenza.

3.3 Analisi di Kuramoto

Nel suo primo lavoro, Kuramoto ha analizzato il suo modello senza l'uso delle simulazioni, ma ha indovinato il comportamento corretto a lungo termine delle soluzioni nel limite $N \rightarrow \infty$, utilizzando delle considerazioni di simmetria e l'intuizione. In particolare, ha cercato soluzioni stabili, supponendo che $r(t)$ è costante e $\psi(t)$ ruota uniformemente con frequenza ω . Usando il sistema di riferimento ruotante con frequenza Ω e scegliendo nel modo giusto l'origine di tale sistema possiamo senza perdita di generalità considerare che $\psi \equiv 0$.

Come conseguenza l'equazione che governa (3.2.3) diventa:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin \theta_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.1)$$

Visto che r è assunto costante in (3.3.1), tutti gli oscillatori sono effettivamente indipendenti, questo è anche il vantaggio di utilizzare la soluzione stazionaria. L'idea è di risolvere il moto di questi oscillatori (che dipenderanno a loro volta dal parametro r). Queste espressioni verranno poi in seguito usate per calcolare r e ψ in modo auto-consistente con l'ipotesi iniziale.

Le soluzioni delle eq. (3.3.1) presentano due tipi di comportamenti a lungo termine, a seconda della grandezza di $|\omega_i|$ rispetto al Kr . Gli oscillatori con $|\omega_i| \leq Kr$ rilassano al punto fisso stabile definito implicitamente da:

$$\omega_i = Kr \sin \theta_i \quad (3.3.2)$$

dove $|\theta_i| \leq \pi/2$. Questi oscillatori saranno chiamati “*locked*” (agganciati) perché loro sono sincronizzati con frequenza Ω nel sistema originale di riferimento. Al contrario, gli oscillatori con $|\omega_i| > Kr$ sono chiamati “*drifting*”, poiché ruotano intorno al cerchio in un modo non uniforme, accelerando vicino a qualche fase e rallentando vicino ad altre, con gli oscillatori più veloci che superano continuamente quelli sincronizzati e gli oscillatori più lenti che vengono superati a loro volta dal cluster sincronizzato. Gli oscillatori sincronizzati hanno delle frequenze proprie che corrispondono al centro di $g(\omega)$ e gli oscillatori drifting hanno frequenze che corrispondono alle code, come ci si aspetta.

A questo punto, Kuramoto ha spiegato perché la popolazione si divide in due gruppi. Ma prima di procedere oltre, notiamo che l'esistenza degli oscillatori drifting sembrerebbe contraddire l'assunzione originale che r e ψ sono costanti. Come è possibile che il baricentro della popolazione rimanga costante con tutti questi oscillatori liberi che si muovono intorno al cerchio?

Kuramoto sorpassò abilmente questo problema aggiungendo un'ulteriore ipotesi: che gli oscillatori drifting obbediscono ad una distribuzione stazionaria sul cerchio. Così il baricentro rimane fisso, anche se i singoli oscillatori continuano a muoversi. Sia $\rho(\theta, \omega)$ la distribuzione degli oscillatori drifting. La stazionarietà richiede che $\rho(\theta, \omega)$ sia inversamente proporzionale alla velocità in θ ; questo significa che gli oscillatori si accumulano alle frequenze lente e si disperdono su quelle veloci nel cerchio¹.

Quindi

¹Questa affermazione intuitiva di Kuramoto viene spiegata in modo rigoroso nel paragrafo successivo dove si deriva la formulazione continua del problema.

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} \quad (3.3.3)$$

La costante di normalizzazione C è determinata da $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = 1$ per ogni ω , che da

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}.$$

Successivamente, facciamo riferimento alla condizione di auto-consistenza: il valore costante del parametro d'ordine deve essere consistente con quello che quello definito implicitamente da (3.2.2). Utilizzando le parentesi angolari $\langle \dots \rangle$ per denotare la media della popolazione, abbiamo

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift}.$$

Poiché dall'ipotesi $\psi = 0$, $\langle e^{i\theta} \rangle = r e^{i\psi} = r$. Così

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift}.$$

Valutiamo prima il contributo del termine degli oscillatori sincronizzati. Nello stato phase-locked, $\sin \theta^* = \frac{\omega}{Kr}$ per tutti $|\omega| \leq Kr$. Quando $N \rightarrow \infty$, la distribuzione delle fasi è simmetrica intorno a $\theta = 0$, perché $g(\omega) = g(-\omega)$; ci sono altrettanto oscillatori a θ^* come a $-\theta^*$. Quindi $\langle \sin \theta \rangle_{lock} = 0$ e

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = \langle \cos \theta \rangle_{lock} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega$$

dove $\theta(\omega)$ è definito implicitamente da (3.3.2). Cambiamo le variabili da ω in θ ed otteniamo

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta g(Kr \sin \theta) Kr \cos \theta d\theta = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta.$$

Adesso consideriamo gli oscillatori non sincronizzati. Essi contribuiscono come segue

$$\begin{aligned} \langle e^{i\theta} \rangle_{drift} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| \geq Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \\ &= \int_{|\omega| \geq Kr} g(\omega) \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta) \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} d\theta \right) d\omega = 0. \end{aligned}$$

Risolvendo esplicitamente gli integrali di cui sopra e facendo uso delle relazioni $g(\omega) = g(-\omega)$ e $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$ risulta che questo integrale svanisce in completa sintonia con l'ipotesi di Kuramoto.

A questo punto la condizione di auto-consistenza si riduce a:

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (3.3.4)$$

L'equazione (3.3.4) ha sempre una soluzione banale $r = 0$, per ogni valore di K . Questo corrisponde ad uno stato completamente incoerente con $\rho(\theta, \omega) = 1/2\pi$ per tutti θ, ω , com'è normale che sia. Un secondo ramo di soluzioni, corrispondente allo stato parzialmente sincronizzato, soddisfa

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (3.3.5)$$

Questo ramo di biforcazione inizia da $r = 0$ per un valore $K = K_c$ ottenuto per $r \rightarrow 0^+$ in (3.3.5). Così,

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}$$

che è la formula esatta di Kuramoto per l'accoppiamento critico alla soglia della sincronizzazione collettiva. Espandendo l'integrale in (3.3.5) in potenze di r , troviamo che la biforcazione è supercritica se $g''(0) < 0$ (il caso generico per una funzione di densità $g(\omega)$ pari, differenziabile e unimodale) ed è subcritica se $g''(0) > 0$.

Per il caso particolare di una densità di Lorentz o Cauchy:

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}$$

Kuramoto [13, 14] ha integrato (3.3.5) per ottenere

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}$$

per tutti $K \geq K_c$. Questa formula è stata poi in seguito verificata anche dai risultati delle simulazioni numeriche.

3.4 Il limite continuo del modello di Kuramoto

In questo paragrafo deriveremo l'equazione che corrisponde al limite continuo del modello di Kuramoto. Questa è un'equazione integro-differenziale non lineare alle derivate parziali. Il merito di tale formalismo è che tutte le domande sull'esistenza, la stabilità, e la biforcazione di vari tipi di soluzioni possono ora essere affrontate in modo sistematico.

Per ogni valore di frequenza ω , immaginiamo una distribuzione continua di oscillatori nel cerchio unitario. Denotiamo con $\rho(\theta, t, \omega)$ la distribuzione di tali oscillatori al tempo t . Allora ρ è non-negativa, periodica con periodo 2π in θ e soddisfa la condizione di normalizzazione:

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta, t, \omega) d\theta = 1 \quad (3.4.1)$$

per tutti i t e ω . L'evoluzione di ρ è data dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) \quad (3.4.2)$$

che esprime la conservazione degli oscillatori con frequenza ω . Qui la velocità $v(\theta, t, \omega)$ viene interpretata come la velocità istantanea di un oscillatore nella posizione θ , data la sua frequenza naturale ω . Da (3.2.3), tale velocità è

$$v(\theta, t, \omega) = \omega + Kr \sin(\psi - \theta) \quad (3.4.3)$$

dove $r(t)$ e $\psi(t)$ sono ora definiti dall'equazione:

$$re^{i\psi} = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} \rho(\theta, t, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (3.4.4)$$

che segue semplicemente dalla legge dei grandi numeri applicata a (3.2.2). Equivalentemente, queste equazioni possono essere combinate per dare per ρ una singola equazione in forma chiusa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\rho \left(\omega + K \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta' - \theta) \rho(\theta', t, \omega') g(\omega') d\omega' d\theta' \right) \right]. \quad (3.4.5)$$

L'espressione tra parentesi è $v(\theta, t, \omega)$, scritto nella versione di N infinito di (3.2.1).

L'equazione (3.4.5) è il limite continuo del modello di Kuramoto [17]. I suoi stati stazionari sono proprio le soluzioni stabili che Kuramoto scrisse intuitivamente in [13, 14]. Per vederlo, si noti che $\partial \rho / \partial t = 0$ implica che $\rho v = C(\omega)$, dove $C(\omega)$ è una costante rispetto a θ . Se $C(\omega) \neq 0$, recuperiamo la densità stazionaria (3.3.3) per gli oscillatori non sincronizzati; se $C(\omega) = 0$, troviamo che ρ è una funzione delta in θ , basato sul phase-locking trovato in precedenza.

Lo stato più semplice è lo stato uniformemente incoerente:

$$\rho_0(\theta, \omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \quad (3.4.6)$$

ovvero quello che prima abbiamo chiamato la soluzione zero. Nel paragrafo seguente, vedremo le sue proprietà di stabilità lineare.

Le equazioni (3.4.2)-(3.4.5) sono state generalizzate in precedenza da Sakaguchi [39], che ha esteso il modello di Kuramoto in modo da includere le fluttuazioni stocastiche nelle frequenze naturali. Le equazioni responsabili in questo caso sono

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \xi_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.4.7)$$

dove le variabili aleatorie $\xi_i(t)$ sono processi indipendenti di rumore bianco che soddisfano

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(s), \xi_j(t) \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(s - t).$$

Qui $D \geq 0$ è il coefficiente del rumore e le parentesi angolari indicano la media su delle realizzazioni indipendenti del rumore. Sakaguchi ha sostenuto intuitivamente che poiché (3.4.7) è un sistema di equazioni di Langevin [40, 41] con accoppiamento di campo medio, quando $N \rightarrow \infty$, la densità $\rho(\theta, t, \omega)$ dovrebbe soddisfare l'equazione di Fokker-Planck [41]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) \quad (3.4.8)$$

dove $v(\theta, t, \omega)$, $r(t)$, $\psi(t)$ sono dati dalle (3.4.3) e (3.4.4). Così l'equazione di Fokker-Planck di Sakaguchi si riduce al limite continuo del modello di Kuramoto quando $D = 0$.

3.4.1 La stabilità dello stato incoerente

Il problema di stabilità lineare per lo stato incoerente del modello di Kuramoto nel suo limite continuo è stato risolto in [16, 17]. Qui daremmo soltanto una descrizione generale dei punti chiave dell'approccio e dei risultati senza entrare nei meriti della dimostrazione. Scriviamo

$$\rho(\theta, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} + \epsilon \eta(\theta, t, \omega) \quad (3.4.9)$$

dove $\epsilon \ll 1$ e scriviamo la perturbazione η come una serie di Fourier in θ

$$\eta(\theta, t, \omega) = c(t, \omega)e^{i\theta} + c.c + \eta^\perp(\theta, t, \omega) \quad (3.4.10)$$

dove $c.c$ denota il complesso coniugato e η^\perp contiene le armoniche degli ordini superiori di η . (Si noti che η ha automaticamente una media 0 che segue dal (3.4.1)). Il motivo per cui scriviamo la perturbazione in questo modo è dovuto al fatto che l'equazione lineare dell'ampiezza della prima armonica, $c(t, \omega)$, è l'unico con una dinamica non banale; questo dovuto essenzialmente al fatto dell'accoppiamento puramente sinusoidale nel modello di Kuramoto. Sostituendo ρ in (3.4.5) e tenendo conto solo dei termini di ordine ϵ da una parte otteniamo che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} + \epsilon c(t, \omega)e^{i\theta} + \dots \right) \\ &= \epsilon e^{i\theta} \frac{\partial c(t, \omega)}{\partial t} + \dots \end{aligned}$$

e dall'altra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\rho \left(\omega + K \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\theta' - \theta) \rho(\theta', t, \omega') g(\omega') d\omega' d\theta' \right) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\rho \left(\omega + K \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\theta' - \theta) \left(\frac{1}{2\pi} + \epsilon c(t, \omega)e^{i\theta} + \dots \right) g(\omega') d\omega' d\theta' \right) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\rho \left(\omega + \epsilon \pi i e^{i\theta} K \int_{-\infty}^{+\infty} c(t, \omega') g(\omega') d\omega' \right) + \dots \right] \\ &= -\epsilon \omega c(t, \omega) i e^{i\theta} - \left(\frac{\epsilon \pi i^2 e^{i\theta} K}{2\pi} + 2\epsilon^2 \pi i^2 c(t, \omega) e^{i2\theta} K \right) \int_{-\infty}^{+\infty} c(t, \omega') g(\omega') d\omega' + \dots \end{aligned}$$

Uguagliando entrambi i membri delle equazioni precedenti e trascurando i termini dell'ordine superiore si ricava:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -i\omega c + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(t, \omega') g(\omega') d\omega' \quad (3.4.11)$$

La parte destra del (3.4.11) definisce l'operatore lineare A , dato da

$$Ac \equiv -i\omega c + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(t, \omega') g(\omega') d\omega' \quad (3.4.12)$$

Come mostrato in [17], lo spettro di A ha una parte continua e una discreta. Il suo spettro continuo è puramente immaginario, $\{i\omega : \omega \in \text{support}(g)\}$, corrispondendo ad una famiglia continua di *modi neutrali*. Questi modi possono essere capiti intuitivamente immaginando una perturbazione iniziale $\eta(\theta, t=0, \omega)$ supportata esattamente da un frammento di frequenza, diciamo $\omega = \omega_0$. In altre parole, si disturba solo quella parte della popolazione degli oscillatori con frequenza intrinseca ω_0 e si lascia il resto nel loro stato incoerente. L'ampiezza corrispondente $c(0, \omega)$ risulta $c(0, \omega) = 0$ per tutti $\omega \neq \omega_0$ (gli oscillatori di queste frequenze non sono disturbati). Per quanto riguarda $\omega = \omega_0$, possiamo scegliere $c(0, \omega_0) = 1$ senza perdita di generalità, poiché (3.4.12) è lineare. Il punto chiave è che l'integrale in (3.4.12) si annulla per questa scelta particolare della perturbazione, e così (3.4.12) si riduce a solo $Ac = i\omega_0 c$. Quindi, moralmente parlando $c(0, \omega)$ è una autofunzione con autovalore puramente immaginario $i\omega_0$, e questo spiega la forma dello spettro continuo. Naturalmente, questo argomento non è strettamente corretto, perché questo frammento di perturbazione è equivalente in L^2 alla perturbazione zero e quindi non è un autovalore. Ma l'intuizione è giusta, ed è in pieno accordo con i calcoli rigorosi riportati in [17].

Per trovare lo spettro discreto di A , sia

$$c(t, \omega) = b(\omega) e^{\lambda t}$$

Allora

$$\lambda b = -i\omega b + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(\omega') g(\omega') d\omega' \quad (3.4.13)$$

L'integrale è una costante da essere determinata in modo auto-consistente. Perciò, sia

$$B = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(\omega') g(\omega') d\omega' \quad (3.4.14)$$

Risolvendo (3.4.13) per b abbiamo che

$$b(\omega) = \frac{B}{\lambda + i\omega}.$$

Sostituendo questa espressione per b di nuovo in (3.4.13) ci dà l'equazione caratteristica:

$$1 = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega) d\omega}{\lambda + i\omega}. \quad (3.4.15)$$

Adesso supponiamo che $g(\omega)$ è pari e una funzione non crescente in $[0, \infty)$, come originariamente considerato anche da Kuramoto. Allora si può provare che (3.4.15) ha al massimo una soluzione per λ e se tale soluzione esiste, è reale [16]. Così (3.4.15) diventa:

$$1 = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} g(\omega) d\omega \quad (3.4.16)$$

Equazione (3.4.16) mostra che un autovalore deve soddisfare la condizione $\lambda \geq 0$, altrimenti il lato destro della (3.4.16) diventa negativo. Perciò non si possono avere mai degli autovalori negativi.

Quindi, la nostra analisi ha dato una sorpresa: lo stato incoerente del modello di Kuramoto non può mai essere linearmente stabile, deve per forza essere instabile o neutralmente stabile. Per trovare il valore di soglia K_c tra questi due casi, consideriamo il limite quando $\lambda \rightarrow 0^+$ in (3.4.16). Allora $\lambda/(\lambda^2 + \omega^2)$ diventa sempre più piccata vicino $\omega = 0$, ma il suo integrale in $-\infty < \omega < \infty$ rimane uguale a π . Così $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \rightarrow \pi \delta(\omega)$ e perciò (3.4.16) tende a

$$1 = \frac{1}{2} K_c \pi g(0)$$

che ci dà una nuova derivazione di K_c inizialmente trovato da Kuramoto [13, 14].

L'equazione (3.4.16) fornisce anche una formula esplicita per il tasso di crescita di λ , se $g(\omega)$ è una densità sufficientemente semplice. Per esempio, la densità uniforme $g(\omega) = 1/2\gamma$ con $-\gamma < \omega < \gamma$ dà

$$\lambda = \gamma \cot\left(\frac{2\gamma}{K}\right) \quad (3.4.17)$$

che è la densità di Lorentz o Cauchy [40]

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}$$

ci dà che

$$\lambda = \frac{1}{2} K - \gamma \quad (3.4.18)$$

Questi autovalori corrispondono al tasso di crescita osservato dalle simulazioni numeriche per $K > K_c$ [17].

In sintesi, la linearizzazione sullo stato incoerente del modello di Kuramoto ha uno spettro continuo puramente immaginario per $K < K_c$, e lo spettro discreto invece è vuoto. All'aumentare di K , un autovalore reale di λ emerge dal spettro continuo e si sposta nel semipiano a destra per $K > K_c$ (Figura 3.4).

Questi risultati confermano la congettura di Kuramoto [14] che lo stato incoerente diventa instabile quando $K > K_c$. Ma la cosa sorprendente è che l'incoerenza è linearmente stabile neutralmente per tutti i $K < K_c$.

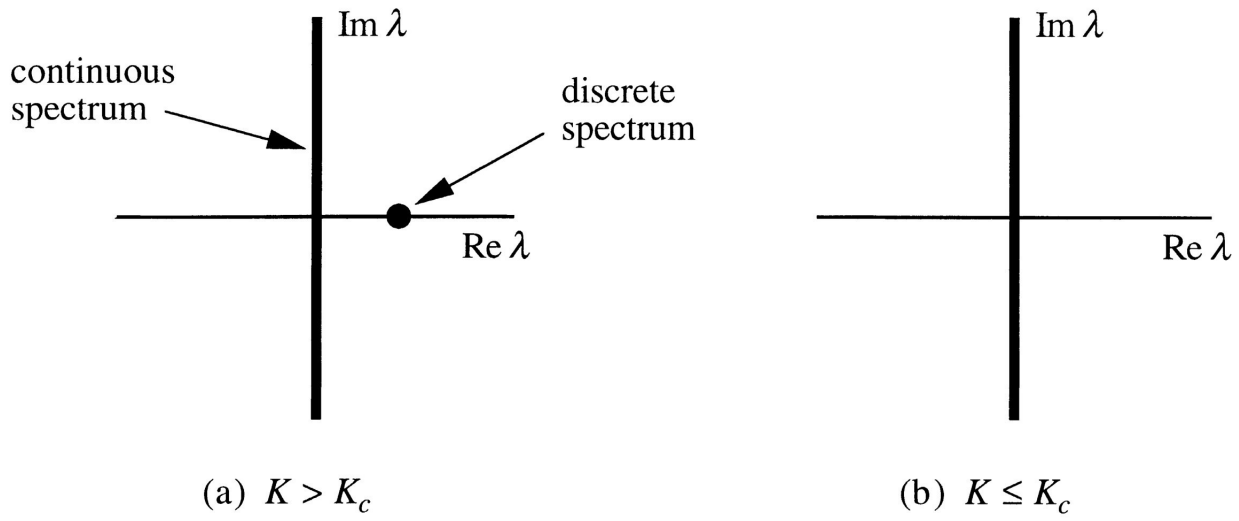


Figura 3.4: Lo spettro dell'operatore lineare (3.4.12) che governa la stabilità lineare dello stato incoerente $\rho_0 \equiv 1/2\pi$. (a) Per $K > K_c$, lo stato incoerente è instabile, grazie all'autovalore discreto $\lambda > 0$. Questo autovalore fuoriesce dallo spettro continuo per $K = K_c$. (b) Per $K \leq K_c$, lo spettro discreto è vuoto e lo stato incoerente è stabile neutralmente. (Figura riprodotta da [15].)

Formalismo Hamiltoniano del modello di Kuramoto

4.1 Introduzione

La sincronizzazione spontanea costituisce uno dei processi auto-organizzativi più rilevanti in Natura. Come abbiamo già menzionato nel capitolo precedente, Kuramoto nel 1975, introdusse un modello, ormai divenuto standard, di oscillatori debolmente accoppiati. Questo modello può caratterizzare la dinamica collettiva di una ampia varietà di sistemi dinamici che vanno dalle reazioni chimiche e le reti neurali alle giunzioni accoppiate di Josephson, i laser e sistemi opto-meccanici. Nel modello di Kuramoto gli N oscillatori sono accoppiati tramite le loro differenze di fase. Il tasso di variazione di ciascuna delle fasi ϕ_i è dato da:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (4.1.1)$$

dove ω_i è la frequenza intrinseca dell'oscillatore i -esimo, $i \in \{1, \dots, N\}$ e K_{ij} denota la matrice simmetrica di accoppiamento. Come abbiamo annunciato anche in precedenza, esistono molti studi legati ai casi particolarmente importanti nella scelta di tale matrice, come per esempio quello dell'accoppiamento simmetrico *tutti-con-tutti*, cioè $K_{ij} = K/N$ per ogni coppia (i, j) e con frequenze casuali scelte da una distribuzione unimodale $g(\omega)$. Se K supera una certa soglia K_c , il sistema manifesta una transizione di fase da uno stato asincrono ad uno stato asintoticamente sincronizzato in fase nel limite (termodinamico) $N \rightarrow \infty$. Una seconda transizione ad uno stato globalmente sincronizzato avviene per valori più grandi della costante di accoppiamento K . Nonostante la sua grande importanza, tanti aspetti del modello di Kuramoto rimangono ignoti. In particolare, parte delle sue proprietà di rilassamento e di stabilità e la dinamica collettiva di un numero finito di oscillatori accoppiati sembrano non usuali per un sistema dissipativo e sono tuttora non comprese del tutto.

In questo capitolo introdurremo un classe di sistemi Hamiltoniani (classici) che manifestano una famiglia di tori invarianti su cui la dinamica è identica a quella del modello di Kuramoto (4.1.1). Questa classe di sistemi descrive per esempio il

modello di Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) [42] nel limite termodinamico oppure la dinamica di campo-medio del condensato di Bose-Einstein (BEC) [43] in un reticolo ottico inclinato per un certo regime di parametri. Dopo aver dimostrato l'equivalenza matematica fra il modello di Kuramoto e quello Hamiltoniano sul toro invariante, mostreremo lo studio analitico è numerico della dinamica Hamiltoniana concentrando sulla soglia della sincronizzazione e le sue conseguenze. Curiosamente, il *phase-locking*¹ di un oscillatore alla fase collettiva (media) implica l'inizio della crescita trasversale dell'azione di quell'oscillatore fuori dal toro invariante. In seguito si deriva una espressione analitica che quantifica il parametro d'ordine per la fase in termini dell'instabilità dell'azione locale. Oltre la dinamica locale, la deviazione dal toro misurata dal rapporto della partecipazione inversa del sistema Hamiltoniano, assicura un indicatore importante della transizione alla sincronizzazione. Quest'ultimo scala meglio col la taglia del sistema che il parametro d'ordine standard usato per misurare la sincronizzazione.

4.2 Il modello Hamiltoniano equivalente

Consideriamo la seguente funzione Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H'(q_1, p_1, \dots) &= \sum_{i=1}^N \frac{\omega_i}{2} (q_i^2 + p_i^2) + \frac{L}{4} (q_i^2 + p_i^2)^2 \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N K_{ij} (q_i p_j - q_j p_i) (q_j^2 + p_j^2 - q_i^2 - p_i^2) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

definita sullo spazio delle fasi di N -particelle \mathbb{R}^{2N} con i parametri locali ω_i , L e la matrice simmetrica di accoppiamento $K_{ij} = K_{ji}$. La trasformazione canonica

$$I_i = (q_i^2 + p_i^2)/2 \quad \text{e} \quad \phi_i = \arctan(q_i/p_i) \quad (4.2.2)$$

per $i \in \{1, \dots, N\}$ semplifica la rappresentazione dell'Hamiltoniana (4.2.1) in termini di variabili di azione-angolo I_i e ϕ_i per gli oscillatori armonici disaccoppiati ($K_{ij} \equiv 0$ e $L = 0$) con l'Hamiltoniana della singola particella $H'(q_i, p_i) = \omega_i(q_i^2 + p_i^2)/2$. Questa trasformazione è invertibile se e solo se $I_i > 0$. Con le nuove variabili azione-angolo $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{S}^N$, la nuova Hamiltoniana diventa

$$H(I_1, \phi_1, \dots) = \sum_{i=1}^N \omega_i I_i + L I_i^2 - \sum_{i,j=1}^N K_{ij} \sqrt{I_i I_j} (I_j - I_i) \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (4.2.3)$$

e le equazioni del moto sono date da

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} \\ &= -2 \sum_{j=1}^N K_{ij} \sqrt{I_i I_j} (I_j - I_i) \cos(\phi_j - \phi_i) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

¹Il termine inglese *phase-locking* viene usato ampiamente nella terminologia tecnica per far riferimento al fenomeno di risonanza, cioè quando un insieme di oscillatori gira con la stessa frequenza. In italiano il termine corretto sarebbe "agganciamento di fase". Tuttavia, poiché il termine inglese è diventato comune pure in italiano sceglieremo di mantenerlo intatto durante questa tesi.

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_i &= \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i + LI_i \\ &+ \sum_{j=1}^N K_{ij} \left[2\sqrt{I_i I_j} \sin(\phi_j - \phi_i) - \sqrt{I_j/I_i} (I_j - I_i) \sin(\phi_j - \phi_i) \right]\end{aligned}\quad (4.2.5)$$

Una proprietà di queste equazioni di moto è quella che lasciano della varietà (tori) specifiche invarianti. Infatti, ogni stato con tutte le azioni $I_i \equiv I, \forall i$ dà $\frac{dI_i}{dt} = 0$, cioè lascia tutte le azioni immutate. Perciò, la famiglia delle varietà dei tori

$$T_1^N = \{(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{S}^N \mid \forall i \in \{1, \dots, N\} : I_i = I\} \quad (4.2.6)$$

sono invarianti sotto il flusso generato da (4.2.4) e (4.2.5) for ogni I dato. In un preciso toro, cioè per ogni valore di I , la dinamica delle fasi

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + LI + \sum_{j=1}^N 2IK_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (4.2.7)$$

uguaglia quella del modello originale di Kuramoto (4.1.1) con una matrice di accoppiamento riscalata $K_{ij} := 2IK_{ij}$ e una traslazione delle frequenze $\omega_i := \omega_i + LI$. Concludiamo che la funzione Hamiltoniana (4.2.1) genera il modello di Kuramoto sul toro invariante T_I^N . Questo vale per tutte le matrici simmetriche di accoppiamento e per ogni distribuzione arbitraria delle frequenze.

Il sistema dinamico Hamiltoniano definito da (4.2.4) e (4.2.5) ha due costanti di moto, la stessa funzione Hamiltoniana H e il doppio del totale del azione

$$C^2 = \sum_{i=1}^N (q_i^2 + p_i^2) = 2 \sum_{i=1}^N I_i \quad (4.2.8)$$

La dinamica (4.2.4) è invariante per una trasformazione simultanea di scala $(p_i, q_i) \rightarrow (Cq_i, Cp_i)$ per ogni i e $K \rightarrow K/C^2$ per ogni $C > 0$, così che possiamo fissare la normalizzazione senza perdita di generalità come $C^2 = N$ e con $I = 1/2$ definiamo il toro di Kuramoto $T_{1/2}^N$. Per di più la dinamica è invariante rispetto ad una traslazione globale di fase, perché essa dipende solo dalle differenze di fase. Le due costanti di moto e l'invarianza per traslazione fanno lo stato delle fasi del intero sistema Hamiltoniano $(2N - 3)$ -dimensionale, mentre il sottospazio invariante $T_{1/2}^N$ è un toro $(N - 1)$ -dimensionale. In seguito ometteremo per convenienza l'indice $1/2$.

4.3 Sistemi di modelli elementari

Che cosa ci dice la meccanica Hamiltoniana riguardo la dinamica di Kuramoto sul toro invariante T^N ? Inizialmente considereremo il sistema più semplice con $N = 2$, che si manifesta nel limite termodinamico del modello Lipkin-Meshkov-Glick della fisica nucleare [42]. La struttura dello spazio delle fasi del modello Hamiltoniano viene illustrata in Figura 4.1 per due valori diversi della costante di accoppiamento. Per $K := K_{1,2} = L = 0$ esistono due punti fissi ellittici fuori dal toro di Kuramoto in $(I_1, I_2) = (0, 1)$ e in $(I_1, I_2) = (1, 0)$. Quando K supera il valore di accoppiamento

critico $K_c = |\omega_1 - \omega_2|$ due ulteriori punti fissi ellittici emergono fuori dal toro e due punti iperbolici (“sella”) sul T^N dovuti ad una biforcazione sella-nodo Hamiltoniana. Uno dei punti fissi iperbolici corrisponde alla soluzione del phase-locking del modello di Kuramoto. Questo stato è stabile sul T^N , ma instabile trasversalmente da esso.

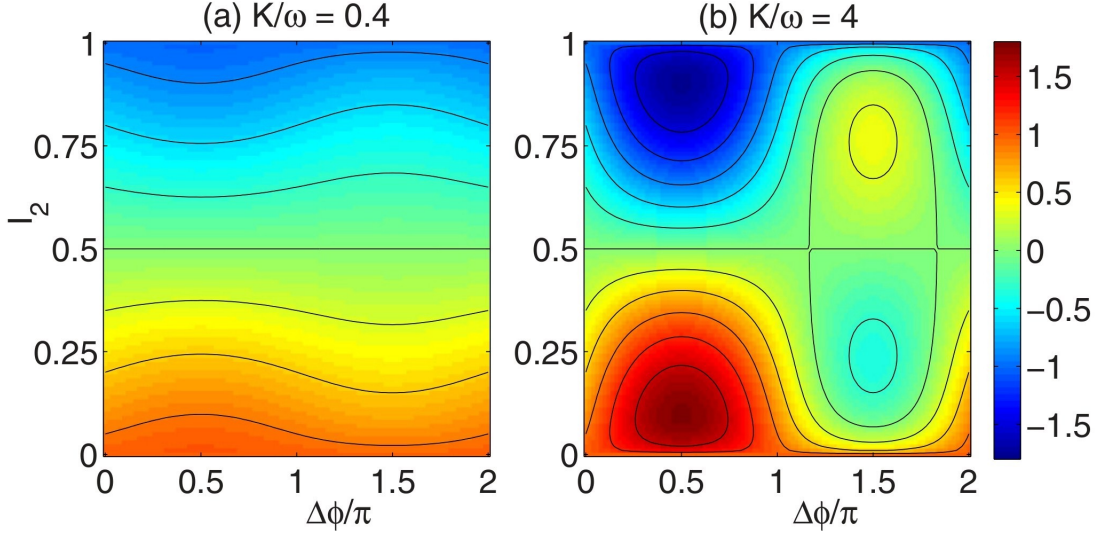


Figura 4.1: La dinamica Hamiltoniana per $N = 2$ oscillatori accoppiati. Linee di energia costante per l’Hamiltoniana (4.2.1) per le frequenze $\omega_2 = \omega = -\omega_1$, $L = 0$ e costante di accoppiamento (a) sotto il valore critico $K < K_c = 2\omega$ e (b) sopra. (Figura riprodotta da [22].)

Sistemi con $N \geq 3$ mostrano una dinamica molto più ricca e suggeriscono l’emergenza di caos (vedi Figura 4.2). Consideriamo per esempio tre oscillatori con frequenze $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (-2, -1, 3)$. Laddove per piccoli valore del accoppiamento $K < K_{c1} \approx 1.5$, la sezione di Poincaré indica esclusivamente dinamica Hamiltoniana regolare (Figura 4.2(a)), invece la dinamica irregolare (Figura 4.2(c)) prevale per valori sufficientemente grandi dell’accoppiamento $K > K_{c2} \approx 4.6$ e con uno stato del piano delle fasi misto per valori intermedi di K (Figura 4.2(b)). Simultaneamente alla transizione nel sistema Hamiltoniano, la sincronizzazione appare sul toro di Kuramoto T^N all’aumentare di K . Gli oscillatori “1” e “2” sono non sincronizzati per un accoppiamento debole ed agganciati in fase per $K > K_{c1}$, invece per la fase del terzo oscillatore rimane incoerente. Per $K > K_{c2}$ si ottiene la sincronizzazione globale delle fasi. Per tutti i valori $K \in [0, \infty)$, la dinamica è non caotica sul toro invariante di Kuramoto cosa che significa che le dinamica di Kuramoto in se non manifesta nessun comportamento irregolare.

La sincronizzazione è infatti legata strettamente all’instabilità della dinamica dell’azione dell’Hamiltoniana: per un accoppiamento debole, quando la dinamica di Kuramoto non è phase-locked, l’azione esibisce una dinamica stabile (vedi Figure 4.3(a) e 4.3(c)) ed un “agganciamento dell’azione” $I_1 \approx I_2 \approx I_3 \approx 1/2$. Diversamente se l’accoppiamento è sufficientemente forte a tal punto che gli oscillatori si sincronizzano, l’azione si “sgancia” ed il caos si manifesta negli scatti intermittenti dell’azione $I_i(t)$ (vedi Figura 3(b) e 3(d)). Per valori intermedi dell’accoppiamento, regioni regolari dello spazio delle fasi esistono ancora intorno a $\phi_2 - \phi_1 \approx 3\pi/2$

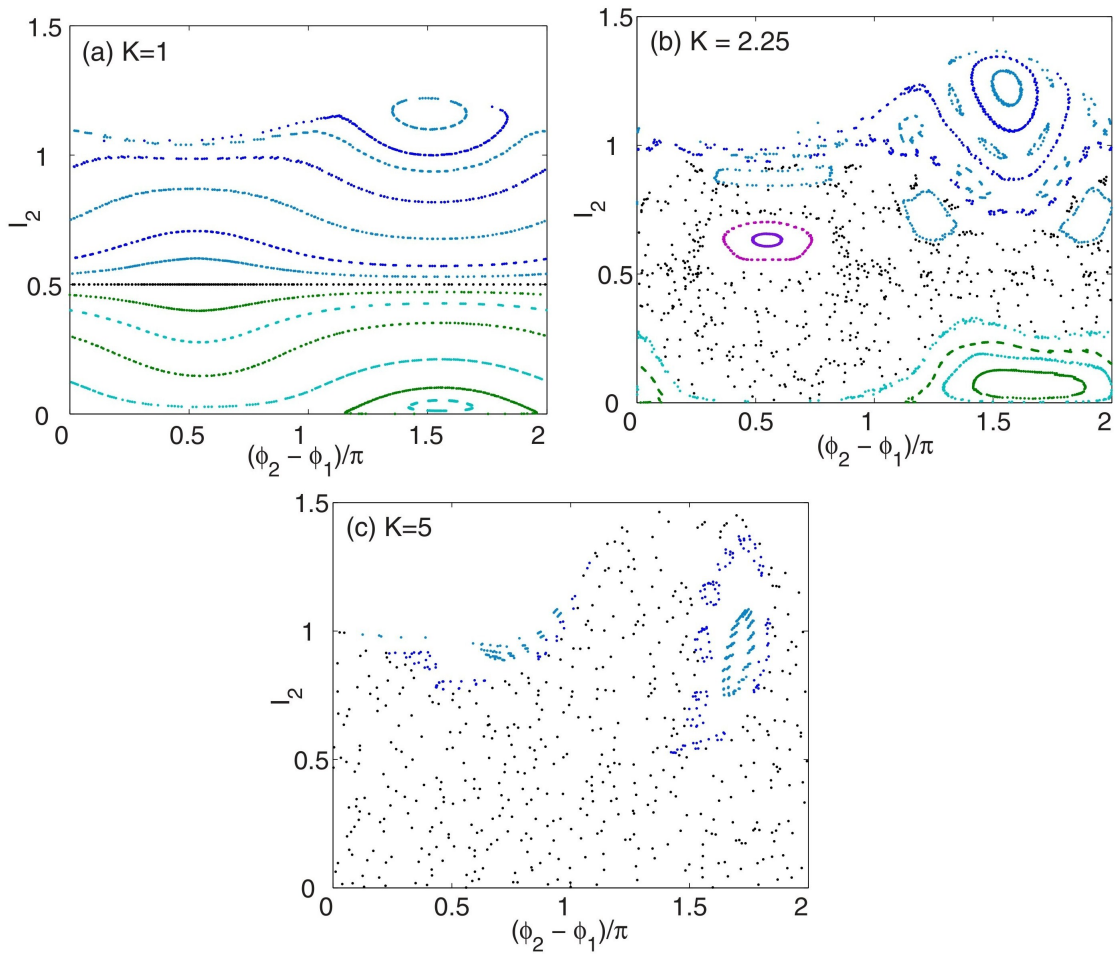


Figura 4.2: Emergenza di caos nella dinamica Hamiltoniana. I pannelli mostrano le sezioni di Poincaré due-dimensionali dello spazio delle fasi per $N = 3$, dove lo spazio delle fasi a sei dimensioni si riduce effettivamente a $2N - 3 = 3$ dimensioni. Colori diversi sono stati usati per guidare il lettore. Le frequenze degli oscillatori sono $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (-2, -1, 3)$. (a) $K = 1 < K_{c1}$, (b) $K_{c1} < K = 2.25 < K_{c2}$, (c) $K = 5 > K_{c2}$. (Figura riprodotta da [22].)

(indicato dalla traiettorie in blu e verde nella Figura 4.2(b)) che confinano con la regione caotica intorno al toro T^N e portano ad episodi di dinamica verosimilmente regolare fra gli scatti.

4.3.1 Esempio: Reticolo di oscillatori nel condensato di Bose-Einstein (BEC)

In questo esempio vedremo la dinamica di un caso particolare di oscillatori accoppiati in fase. Consideriamo una catena di oscillatori con frequenze proprie equidistanti fra di loro $\omega_n = n\omega_B$ ed accoppiamento con il primo vicino $K_{ij} = K$ per $|i - j| = 1$ e zero altrimenti. Il sistema descrive la dinamica del condensato di Bose-Einstein (BEC) in un reticolo ottico [43] che è fra l'altro anche un modello chiave nel studiare il fenomeno delle onde non-lineari [44] e la materia quantistica correlata [45]. Nel limite d'assenza d'interazione $K = L = 0$, tutte gli oscillatori ruotano con

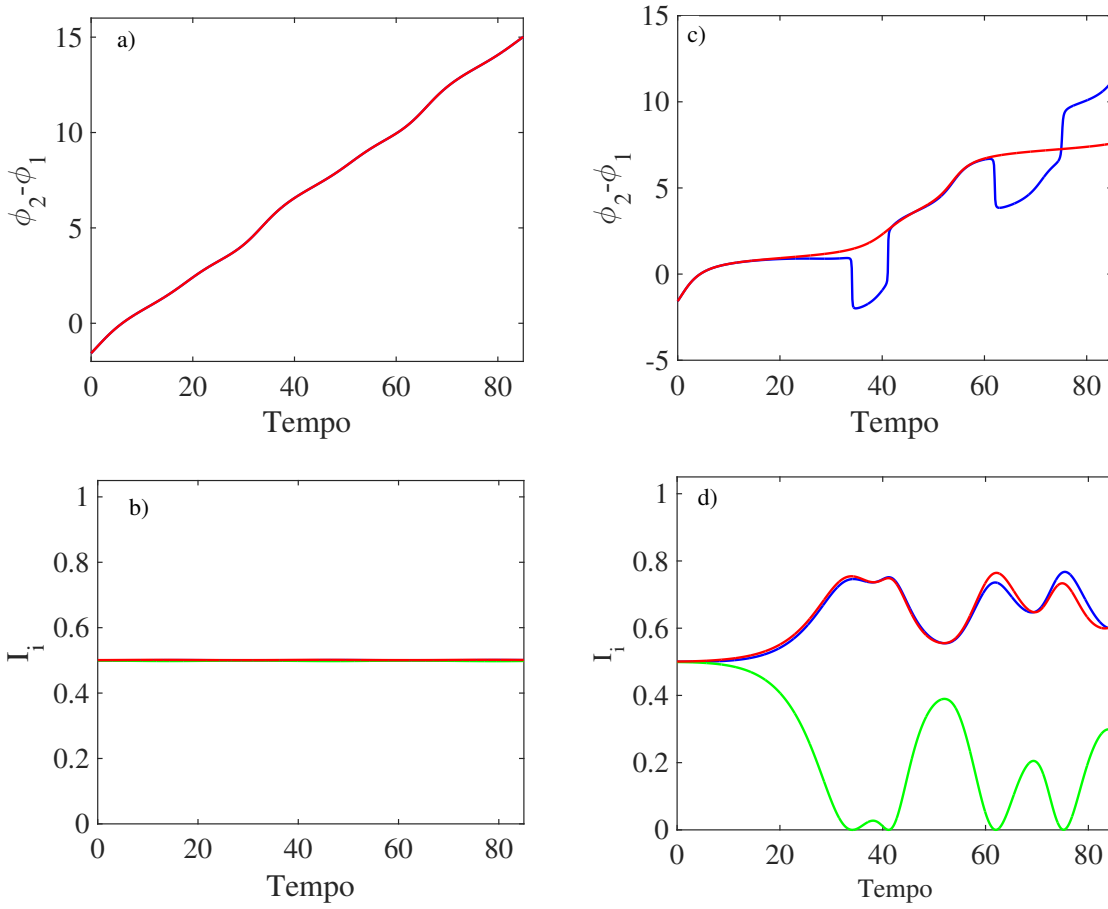


Figura 4.3: Gli scatti d'azione indicano l'inizio della sincronizzazione. I pannelli mostrano la dinamica di tre oscillatori accoppiati in regime (a, c) asincrono e (b, d) di aggancio parziale della fase. Le linee continue mostrano la dinamica delle (a, c) fasi e (b, d) azioni $I_i(t)$. Le condizioni iniziali sono state scelte casualmente perturbando le azioni $I_i(0)$ fuori dal toro $I_i \equiv 1/2$ con un valore dell'ordine 10^{-4} , vicino ma non sul toro T^N . Le linee tratteggiate mostrano la dinamica delle fasi $\phi_i(t)$ sulla varietà T^N , cioè la dinamica di Kuramoto. I parametri sono $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.8, 1, 1.2)$ e rispettivamente (a, c) $K = 0.1$ e (b, d) $K = 0.3$. (Figura riprodotta da [22].)

frequenze proprie ω_i portando a dei ripristini periodici che possono essere osservati come oscillazioni di Bloch, oscillazioni delle particelle nel reticolo. Il potenziale non-lineare di campo-medio introduce un accoppiamento degli stato propri con i primi vicini (termini $\sim K$). La dinamica nelle vicinanze del toro di Kuramoto è particolarmente importante per capire la stabilità strutturale del reticolo. Le non-linearità deboli disturbano la dinamica strettamente periodica, laddove le azioni rimangono agganciate, $I_i \approx I_0$, come mostrato in Figura 4.4. Negli esperimenti questo porta allo smorzamento delle oscillazioni atomiche di Bloch. Per non-linearità più forti coppie di oscillatori possono sincronizzarsi in fase, cosa che implica che le azioni I_i si sganciano e le fluttuazioni di densità cominciano a crescere esponenzialmente come mostrato in Figura 4.4(b) e 4.4(d). La sincronizzazione quindi implica la distruzione del condensato di Bose-Einstein in un reticolo.

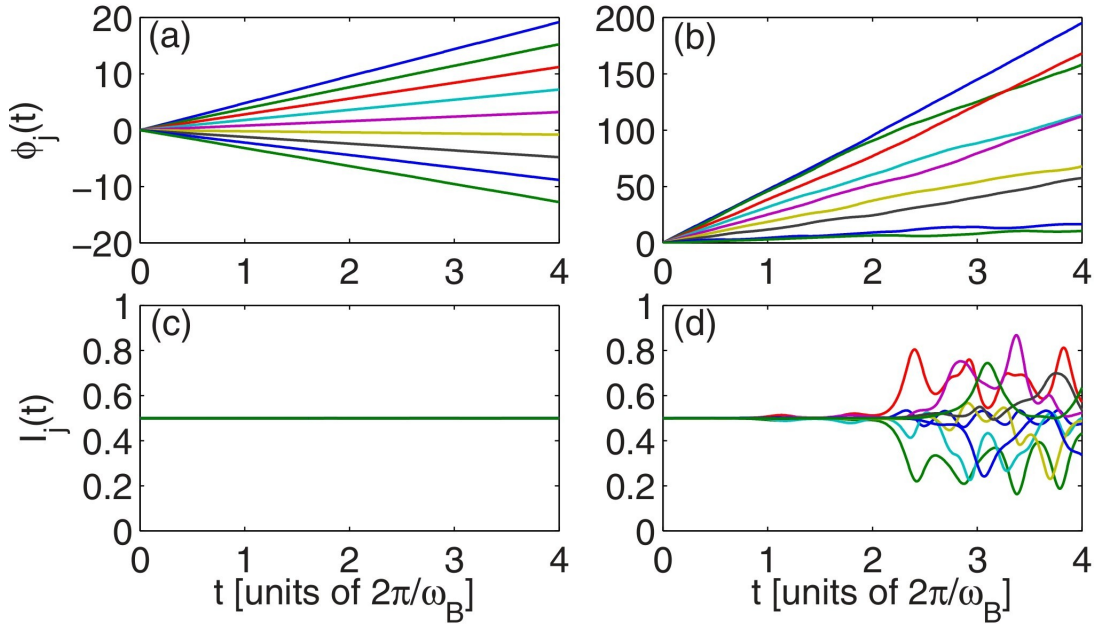


Figura 4.4: Dinamica di una catena di $N = 9$ oscillatori con frequenze naturali che crescono linearmente che descrive la dinamica di campo-medio di un BEC in un reticolo ottico, in regime di (a, c) non sincronizzato e (b, d) parzialmente sincronizzato. Lo stato iniziale è stato scelto come un BEC omogeneo con piccole fluttuazioni di densità, cioè $I_i(0) = 1/2 + \epsilon_i$ con la piccola perturbazione ϵ_i del ordine 10^{-4} e fasi casuali $\phi_i(0)$. Lo stato iniziale è quindi vicino ma non su T^N . I parametri sono $\omega_B = 0.25$ e (a, c) $K = 0.03$, $L = 0.4$ e (b, d) $K = 0.15$, $L = 2$. (Figura riprodotta da [22].)

4.4 La transizione alla sincronizzazione

Gli esempi precedenti rivelano la relazione fondamentale fra la sincronizzazione del modello di Kuramoto e l'instabilità della dinamica trasversale: Una sincronizzazione stabile della dinamica di Kuramoto implica che il flusso dello spazio delle fasi si concentra sul toro T^N . Visto che il flusso Hamiltoniano conserva il volume dello spazio delle fasi, egli si deve per forza espandere in direzione trasversale al T^N . Queste espansioni si osservano generalmente come variazioni di I_i (vedi Figura 4.4(d)).

Per comprendere quantitativamente la relazione che c'è fra la sincronizzazione in fase e l'instabilità delle azioni, considereremo la versione originale di Kuramoto con accoppiamento tutti-con-tutti $K_{ij} = K/N$, $L = 0$ e frequenze scelte casualmente da una distribuzione Lorenziana (vedi il Capitolo 3). Deriviamo analiticamente la dinamica approssimata delle perturbazioni

$$\epsilon_i(t) = I_i(t) - I_0 \quad (4.4.1)$$

fuori dal toro T^N , dove $I_0 = 1/2$ tramite la normalizzazione delle azioni. Espandendo le equazioni del moto (4.2.4) al primo ordine in ϵ_i (intorno a $\epsilon_i \equiv 0$) si ottiene la

dinamica

$$\dot{\epsilon}_i(t) = \sum_j A_{ij} \epsilon_j \quad (4.4.2)$$

dove $A_{ij} := \frac{K}{N} (\delta_{ij} [\sum_m \cos(\phi_i - \phi_m)] - \cos(\phi_i - \phi_j))$. Questa espressione collega direttamente l'instabilità delle azioni con la dinamica dell'agganciamento di fase del modello originale di Kuramoto: per piccole perturbazioni ϵ_i , approssimiamo la dinamica delle fasi $\phi_i(t)$ con la dinamica associata $\phi_i^T(t)$ sulla varietà di Kuramoto T^N . Assumendo che la dinamica delle fasi sia veloce, approssimiamo ulteriormente $A_{ij}(t)$ con la sua media temporale.

$$\bar{A}_{ij} := \frac{K}{N} \delta_{ij} \left[\overline{\sum_m \cos(\phi_i^T - \phi_m^T)} \right] - \frac{K}{N} \cos(\phi_i^T - \phi_j^T). \quad (4.4.3)$$

La struttura della matrice A_{ij} diventa particolarmente semplice se N diventa grande. Gli elementi fuori della diagonale decadono come $1/N$ così che la matrice tende a diventare diagonale. Sommando i termini della diagonale otteniamo

$$\bar{A}_{ij} := K \delta_{ij} \overline{r \cos(\phi_i^T - \psi)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad (4.4.4)$$

con il parametro d'ordine definito (come in precedenza)

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j^T}. \quad (4.4.5)$$

Generalmente, se la fase di un oscillatore i è non agganciata alla fase complessiva ψ , il coseno tende a mediarsi (col passar del tempo) in tal modo che $A_{ii} \approx 0$. Al contrario, se l'oscillatore i è agganciato, $A_{ii} > 0$. Quindi troviamo che la perturbazione $\epsilon_i(t)$ cresce esponenzialmente se e solo se le fasi corrispondenti sono agganciate, al meno per $N \gg 1$.

L'esempio numerico mostrato in Figura 4.5(a) e 4.5(b) illustra questo ragionamento: le perturbazioni sono particolarmente grandi quando gli oscillatori associati di Kuramoto sono sincronizzati (la regione ombreggiata). In particolare, il tasso più veloce di divergenza delle azioni dal toro invariante si aspetta per quegli oscillatori che (i) sono agganciati in fase (ii) sono più vicini alla fase complessiva ψ (centro della regione della sincronizzazione) così che il termine coseno è massimale.

L'autovalore più grande λ_1 della matrice A_{ij} , domina il tasso di divergenza delle azioni per valori iniziali casuali vicino al toro di Kuramoto. Nell'approssimazione diagonale (4.4.4) per $N \gg 1$ e assumendo l'indipendenza reciproca di r e $\cos(\phi_i^T - \psi)$ tale che $r \cos(\phi_i^T - \psi) = \bar{r} \times \overline{\cos(\phi_i^T - \psi)}$ otteniamo

$$\bar{r} \approx \frac{1}{K} \max_i \bar{A}_{ii} \quad (4.4.6)$$

poiché $\phi_i^T - \psi \approx 0$ per i che corrisponde al massimo, e perciò $\cos(\phi_i^T - \psi) \approx 1$. Questa espressione proietta esplicitamente le proprietà di stabilità delle azioni alle proprietà di sincronizzarsi delle fasi. Quindi la crescita delle perturbazioni delle

azioni nel sistema Hamiltoniano predice il parametro d'ordine della sincronizzazione con

$$\bar{r} \approx \frac{1}{Kt} \max_i \log [\epsilon_i(t) / \epsilon_i(0)] \quad (4.4.7)$$

Osservazioni dirette del parametro d'ordine delle fasi di Kuramoto mostrano un

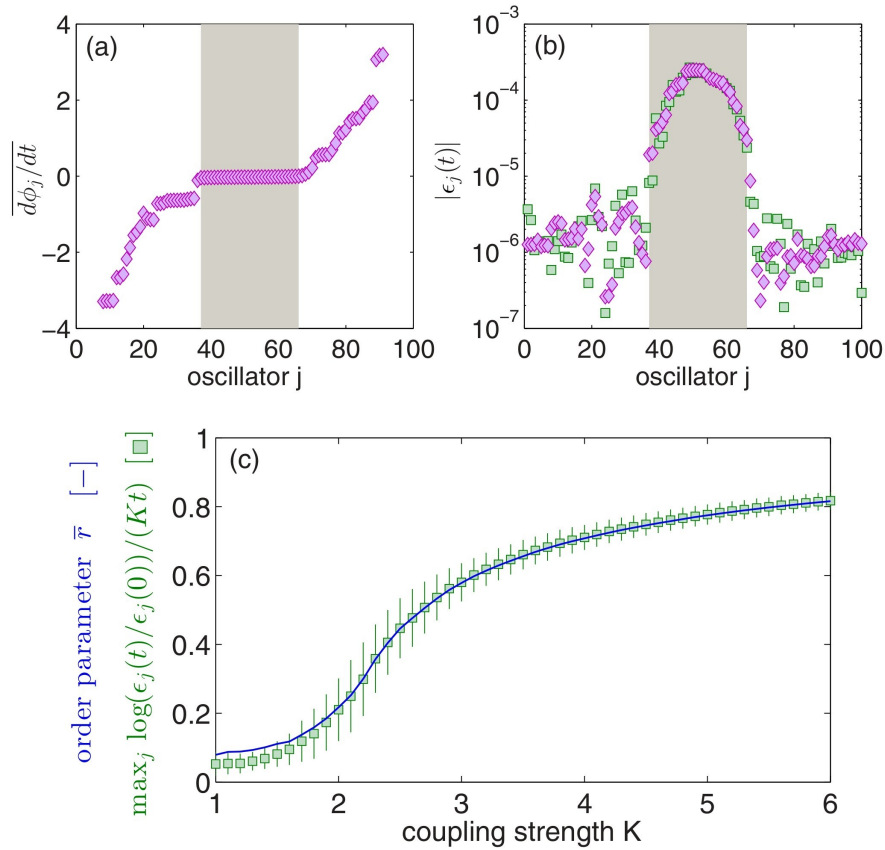


Figura 4.5: L'instabilità trasversale delle azioni predice il parametro d'ordine. (a) La velocità media della fase $d\phi_i/dt$ di $N = 100$ oscillatori nel regime di sincronizzazione parziale della fase per $K = 2.2$. (b) Le perturbazioni $|\epsilon_i(t)|$ crescono fuori dalla varietà di Kuramoto, come mostrato dopo $t = 10$, partendo dal $\epsilon_i(0) = \pm 10^{-6}$ con segni casuali. Risultati numerici esatti per la dinamica Hamiltoniana (\square) vengono mostrati in confronto con l'approssimazione diagonale (4.4.4), (\diamond). Le azioni crescono sostanzialmente di più per quegli oscillatori che sono agganciati in fase (regione ombreggiata). (c) La predizione del parametro d'ordine dalla dinamica Hamiltoniana delle azioni (4.4.7) (\square) combacia bene con l'attuale parametro d'ordine r (4.4.5) (—) direttamente misurato dalle fasi di Kuramoto. ($N = 250$, i dati sono stati mediati su 100 realizzazioni di ω_i , le linee verticali indicano la deviazioni standard (4.4.7)) (Figura riprodotta da [22].)

accordo eccellente (vedi Figura 4.5(c)) con questa predizione.

Ma è possibile quantificare l'instabilità oltre l'approssimazione lineare (4.4.2)? Per rispondere a questa domanda confrontiamo di nuovo la dinamica sul toro di Kuramoto T^N (con azioni iniziali $I_i(0) = 1/2$) con le traiettorie che cominciano nella sua vicinanza immediata (azioni iniziali ($I_i(0) = 1/2 + \epsilon_i$), e misuriamo quanto

queste dinamiche deviano l'una dall'altra valutando la varianza di $(2I_i)$. Per questa quantità troviamo il *tasso di partecipazione inversa*

$$P_2 := \frac{\langle (2I_i)^2 \rangle - \langle (2I_i) \rangle^2}{\langle (2I_i) \rangle^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q_i^2 + p_i^2)^2 - 1 \quad (4.4.8)$$

dovuto alla normalizzazione delle azioni. Per costruzione $P_2 = 0$ sul toro T^N .

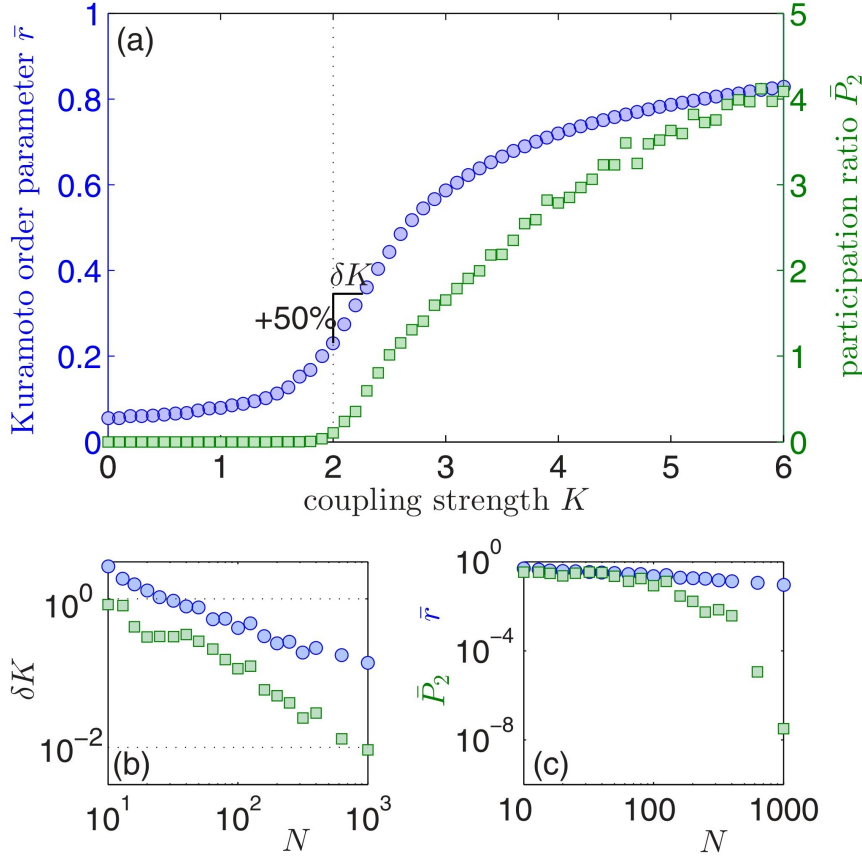


Figura 4.6: Il tasso della partecipazione inversa della dinamica Hamiltoniana rivela la transizione di fase per la sincronizzazione. (a) Il parametro d'ordine \bar{r} (\circ , asse a sinistra) ed il tasso della partecipazione inversa P_2 (\square , asse a destra) come funzioni della costante di accoppiamento K per $N = 250$ oscillatori. La teoria di campo-medio predice l'inizio dell'ordine della fase nel modello di Kuramoto in $K_c = 2$ (linea verticale tratteggiata). (b) Larghezza della regione di transizione δK , dove r aumenta con 50% dal suo valore critico in K_c , cioè $r(K_c + \delta K) = 1.5r(K_c)$ come una funzione degli numero degli oscillatori N . (c) Ridimensionamento di taglia-finita di r e P_2 per un valore di accoppiamento sub-critico $K = 1.8$. Le azioni iniziali sono $I_i = 1/2$ (\circ) e $I_i = 1/2 + \epsilon_i$ (\square), dove ϵ_i sono scelti da una distribuzione Gaussiana con deviazione standard 10^{-4} . Tutti i punti dei dati sono le medie per 100 realizzazioni indipendenti ciascuno (Figura riprodotta da [22]).

$P_2 > 0$ indica che la traiettoria lascia il toro T^N e comincia a scattare. E' noto il fatto che sistemi di oscillatori di Kuramoto esibiscono una transizione di fase da uno stato incoerente a uno stato sincronizzato per qualche K_c nel limite termodinamico

$N \rightarrow \infty$ [15]. Per N finito, tuttavia, la transizione è fortemente incomprensibile ed il parametro d'ordine r cresce gradualmente con K (vedere anche la Figura 4.6). Sorprendentemente, la stessa transizione nel sistema Hamiltoniano è sostanzialmente più chiara come indicato dalla crescita rapida del tasso della partecipazione inversa $P_2 > 0$ dal valore originariamente piccolo vicino a zero (Figura 4.6). In fatti, P_2 indica la transizione più precisamente che il parametro d'ordine di Kuramoto, entrambi rispetto al ridimensionamento di taglia finita sotto la transizione ed il salto che avviene al punto di transizione K_c (vedi l'inserito delle Figure 4.6(b) e 4.6(c)).

Controllo della sincronizzazione nel modello di Kuramoto

In questo capitolo mostreremo come il metodo di controllo Hamiltoniano presentato inizialmente in questo lavoro di tesi, si può applicare al controllo della sincronizzazione del modello di Kuramoto. Come vedremo più in dettaglio, è possibile impedire che il sistema di oscillatori debolmente accoppiati entri in sincronia quando si aggiunge un ulteriore piccolo termine, detto termine di controllo alle equazioni originarie di Kuramoto. La condizione di accoppiamento debole può inizialmente sembrare una restrizione importante. Tuttavia come abbiamo più volte ripetuto durante questa tesi la maggior parte dei casi quando la sincronizzazione avviene spontaneamente è proprio in questo regime. Questo fatto giustifica in pieno la teoria che svilupperemo in questo capitolo. Con il metodo che qui introduciamo è possibile, risolvere il problema di risonanza che spesso emerge, come abbiamo visto nelle strutture di costruzione come per esempio il famoso caso di Millenium Bridge [19].

5.1 Controllo Hamiltoniano degli oscillatori accoppiati in fase

Inizieremo considerando la seguente Hamiltoniana espressa in variabili di azione-angolo derivata nel capitolo precedente¹

$$H(\phi_1, I_1, \dots, \phi_N, I_N) = \sum_i \omega_i I_i - \frac{K}{N} \sum_{ij} A_{ij} \sqrt{I_i I_j} (I_j - I_i) \sin(\phi_j - \phi_i). \quad (5.1.1)$$

Come abbiamo visto, essa è responsabile per la descrizione dal punto di vista energetico di un sistema conservativo di oscillatori accoppiati in fase. Con A_{ij} si indica la matrice di adiacenza del accoppiamento. In questo capitolo sarà considerato sempre

¹Ricordiamo che le variabili azione-angolo sono state inizialmente usate per l'Hamiltoniana solo quando il sistema è disaccoppiato $K = 0$. Qui estendiamo l'uso di tale variabili anche al caso accoppiato $K \neq 0$.

$A_{ij} = A_{ji} = 1$ anche se per ragioni di generalità e consistenza con la definizione (5.1.1) essa verrà mantenuta nei conti che seguono.

Osservazione 6. Il caso generale quando il sistema viene accoppiato tramite una rete, cioè la matrice d'adiacenza A non necessariamente è condizionata come sopra, si riflette anche sul modello di Kuramoto. Questa generalizzazione è molto interessante in se poiché si verificano tanti casi simile in natura ed è diventata un tema di ricerca intensiva [46]. Dal punto di vista del controllo invece sono nati nuovi approcci che agiscono non tanto sul modello in se quanto sulla topologia delle rete di accoppiamento [47].

In modo da considerare il problema dal punto di vista perturbativo definiamo l'Hamiltoniana non perturbata H_0

$$H_0 = \sum_i \omega_i I_i \quad (5.1.2)$$

come la parte non accoppiata e definiamo il termine perturbativo V

$$V = -\frac{K}{N} \sum_{ij} A_{ij} \sqrt{I_i I_j} (I_j - I_i) \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (5.1.3)$$

come la parte corrispondente a solo l'energia potenziale. La costante di accoppiamento K giocherà il ruolo di un piccolo parametro perturbativo. Infatti in modo da applicare la teoria di Vittot [23, 24] è necessario avere un sistema di oscillatori debolmente accoppiati. Adesso che il problema perturbativo è stato definito siamo in grado di calcolare il termine di controllo di questa Hamiltoniana seguendo il metodo di controllo presentato in Capitolo 2. Ricordiamo che il nostro obiettivo è quello di modificare leggermente la perturbazione V in modo di creare di nuovo delle strutture regolari (tori invarianti) nello spazio delle fasi. Questo significa per il modello di Kuramoto l'impossibilità del sistema di sincronizzarsi. Il teorema del controllo 2.2.1 ci dà l'espressione esatta del termine di controllo $f(V)$ che useremo per controllare l'Hamiltoniana perturbata (5.1.1). Seconda la formula (2.2.2) gli ingredienti necessari sono i seguenti: l'operatore pseudo-inversa dell'Hamiltoniana applicata alla perturbazione ΓV , la parte risonante $\mathcal{R}V$ e quella non risonante $\mathcal{N}V$ del termine perturbativo. Ma prima calcoliamo le seguenti derivate che ci saranno utili lungo questo paragrafo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial I_l} &= \omega_l \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_l} &= \frac{K}{N} \sum_j A_{lj} \sqrt{I_l I_j} (I_j - I_l) \cos(\phi_j - \phi_l) - \frac{K}{N} \sum_i A_{il} \sqrt{I_l I_i} (I_l - I_i) \cos(\phi_l - \phi_i) \\ &= \frac{K}{N} \sum_i A_{li} \sqrt{I_l I_i} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l) - \frac{K}{N} \sum_i A_{il} \sqrt{I_l I_i} (I_l - I_i) \cos(\phi_l - \phi_i) \\ &= \frac{K}{N} \sum_i (A_{il} + A_{li}) \sqrt{I_l I_i} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l) \end{aligned}$$

Per definire l'operatore pseudo-inversa dell'Hamiltoniana Γ prima vedremo come essa stessa agisce sulla perturbazione V con l'ausilio delle espressioni precedentemente calcolate:

$$\begin{aligned}
\{H_0\}V &= \sum_l \frac{\partial H_0}{\partial I_l} \frac{\partial V}{\partial \phi_l} \\
&= - \sum_l \omega_l \frac{K}{N} \sum_i (A_{li} + A_{il}) \sqrt{I_l I_i} (I_l - I_i) \cos(\phi_i - \phi_l) \\
&= - \frac{K}{N} \sum_{li} A_{li} \omega_l \sqrt{I_l I_i} (I_l - I_i) \cos(\phi_i - \phi_l) - \frac{K}{N} \sum_{il} A_{il} \omega_l \sqrt{I_l I_i} (I_l - I_i) \cos(\phi_i - \phi_l) \\
&= - \frac{K}{N} \sum_{il} A_{il} \omega_i \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l) + \frac{K}{N} \sum_{il} A_{il} \omega_l \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l) \\
&= - \frac{K}{N} \sum_{il} A_{il} (\omega_i - \omega_l) \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l)
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo definire la pseudo-inversa dell'Hamiltoniana non perturbata come la seguente funzione:

$$\Gamma V = \frac{K}{N} \sum_{\substack{il \\ i \neq l}} \frac{A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l); \quad \forall \omega_i \neq \omega_l \text{ per } i \neq l. \quad (5.1.4)$$

Infatti, si può facilmente verificare che tale funzione verifica la proprietà della pseudo-inversa, cioè che $\{H_0\}^2 \Gamma V = \{H_0\}V$. L'attento lettore può immediatamente accorgersi che questa definizione vale solo nel caso non-risonante quando tutte le frequenze ω_i sono diverse, il caso che considereremo in questo capitolo. Ne segue che la perturbazione è composta solo dalla parte non-risonante e quella risonante è uguale a zero:

$$\mathcal{R}V = 0 \quad (5.1.5)$$

$$\mathcal{N}V = - \frac{K}{N} \sum_{ij} A_{ij} \sqrt{I_i I_j} (I_j - I_i) \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (5.1.6)$$

Ricordiamo inoltre che il termine di controllo f nel caso non-risonante viene descritto in modo semplificato dalla serie ricorsiva:

$$f = \sum_{s \geq 2} f_s \quad \text{dove} \quad f_1 = V \quad f_s = -\frac{1}{s} \{\Gamma V, f_s\} \sim \mathcal{O}(\epsilon^s) \quad (5.1.7)$$

Come si può notare il termine $f(V)$ è al massimo di ordine ϵ^2 ricordandoci che ϵ è l'ordine di V . Per il momento ci concentreremo solo sul secondo termine f_2 . Poi successivamente spiegheremo il perché di questa scelta. Prima però calcoliamo i termini utili per avere l'espressione esplicita di (5.1.7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma V}{\partial I_l} &= \frac{\partial}{\partial I_l} \left(\frac{K}{N} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} A_{ij} \sqrt{I_i I_j} \frac{I_j - I_i}{\omega_j - \omega_i} \cos(\phi_i - \phi_j) \right) \\
&= \frac{K}{N} \sum_{\substack{j \\ l \neq j}} A_{lj} \frac{\partial}{\partial I_l} \left(\sqrt{I_l I_j} (I_j - I_l) \right) \frac{\cos(\phi_l - \phi_j)}{\omega_j - \omega_l} + \\
&\quad + \frac{K}{N} \sum_{\substack{i \\ l \neq i}} A_{il} \frac{\partial}{\partial I_l} \left(\sqrt{I_l I_i} (I_l - I_i) \right) \frac{\cos(\phi_i - \phi_l)}{\omega_l - \omega_i} \\
&= \frac{K}{N} \sum_{\substack{i \\ l \neq i}} \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \frac{I_i^2 - 3I_i I_l}{2\sqrt{I_i I_l}} \cos(\phi_i - \phi_l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial I_l} &= \frac{\partial}{\partial I_l} \left(-\frac{K}{N} \sum_{ij} A_{ij} \sqrt{I_i I_j} (I_j - I_i) \sin(\phi_j - \phi_i) \right) \\
&= -\frac{K}{N} \sum_{lj} A_{lj} \frac{\partial}{\partial I_l} \left(\sqrt{I_l I_j} (I_j - I_l) \right) \sin(\phi_j - \phi_l) + \\
&\quad - \frac{K}{N} \sum_{li} A_{il} \frac{\partial}{\partial I_l} \left(\sqrt{I_l I_i} (I_l - I_i) \right) \sin(\phi_l - \phi_i) \\
&= -\frac{K}{N} \sum_i (A_{li} + A_{il}) \frac{I_i^2 - 3I_i I_l}{2\sqrt{I_i I_l}} \sin(\phi_i - \phi_l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma V}{\partial \phi_l} &= \frac{\partial}{\partial \phi_l} \left(\frac{K}{N} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \frac{A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \sqrt{I_i I_j} (I_i - I_j) \sin(\phi_i - \phi_j) \right) \\
&= \frac{K}{N} \sum_{\substack{j \\ l \neq j}} \frac{A_{lj}}{\omega_j - \omega_l} \sqrt{I_j I_l} (I_j - I_l) (-\sin(\phi_l - \phi_j)) + \\
&\quad + \frac{K}{N} \sum_{\substack{i \\ l \neq i}} \frac{A_{il}}{\omega_l - \omega_i} \sqrt{I_i I_l} (I_l - I_i) \sin(\phi_i - \phi_l) \\
&= \frac{K}{N} \sum_{\substack{i \\ l \neq i}} \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_l - \omega_i} \sqrt{I_l I_i} (I_l - I_i) \sin(\phi_i - \phi_l).
\end{aligned}$$

Una volta ottenuti i termini dell'espressione (5.1.7) corrispondenti al termine f_2 , li raggruppiamo insieme per avere

$$\begin{aligned}
f_2 &= -\frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma V}{\partial I_l} \frac{\partial V}{\partial \phi_l} - \frac{\partial \Gamma V}{\partial \phi_l} \frac{\partial V}{\partial I_l} \right) \\
&= -\frac{K^2}{2N^2} \sum_l \left(\sum_i \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \frac{I_l^2 - 3I_i I_l}{2\sqrt{I_i I_l}} \cos(\phi_i - \phi_l) \sum_i (A_{li} + A_{il}) \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_i (A_{li} + A_{il}) \frac{I_l^2 - 3I_i I_l}{2\sqrt{I_i I_l}} \sin(\phi_i - \phi_l) \sum_i \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \sin(\phi_i - \phi_l) \right). \quad (5.1.8)
\end{aligned}$$

Nello stesso modo si possono calcolare anche i successivi termini di ordine superiore per disegnare un controllo ancora più accurato dell'Hamiltoniana (5.1.1). Tuttavia, come vedremo nel paragrafo seguente non tutti i termini riescono a soddisfare le condizioni per il passaggio al modello di Kuramoto.

5.2 Il termine di controllo nel modello di Kuramoto

Dopo aver calcolato il termine di controllo dell'Hamiltoniana siamo interessati a conoscere i rispettivi termini di controllo nelle equazioni di Kuramoto. Per questo dobbiamo seguire la "ricetta" data in [22], cioè prima dobbiamo riscrivere le equazioni di Hamilton con l'aggiunta dei termini di controllo dell'angolo ϕ e dell'azione I (indicati con l'apice c); poi successivamente dobbiamo verificare se quando la dinamica si restringe a solo un toro invariante (toro di Kuramoto T^N) l'equazione dell'azione si annulla e si ottiene l'equazione di Kuramoto controllata. Diamo qui solo le correzioni delle equazioni di moto (4.2.4, 4.2.5) riportante nel Capitolo 4.

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_j^c}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial I_j} = & -\frac{K^2}{2N^2} \left[\sum_i (A_{ji} + A_{ij}) \frac{I_j^2 - 3I_i I_j}{2\sqrt{I_i I_j}} \cos(\phi_i - \phi_j) \sum_i \frac{A_{ji} + A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \frac{I_j^2 - 3I_i I_j}{2\sqrt{I_i I_j}} \cos(\phi_i - \phi_j) + \right. \\
& + \sum_i \frac{A_{ji} + A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \frac{I_j^2 - 3I_i I_j}{2\sqrt{I_i I_j}} \sin(\phi_i - \phi_j) \sum_i (A_{ij} + A_{ji}) \frac{I_j^2 - 3I_i I_j}{2\sqrt{I_i I_j}} \sin(\phi_i - \phi_j) + \\
& + \sum_i \frac{A_{ij} + A_{ji}}{\omega_i - \omega_j} \frac{3(I_j - I_i)}{4\sqrt{I_i I_j}} \cos(\phi_i - \phi_j) \sum_i (A_{ij} + A_{ji}) \sqrt{I_i I_j} (I_i - I_j) \cos(\phi_i - \phi_j) + \\
& + \sum_i (A_{ij} + A_{ji}) \frac{3(I_j - I_i)}{4\sqrt{I_i I_j}} \sin(\phi_i - \phi_j) \sum_i \frac{(A_{ij} + A_{ji})}{\omega_i - \omega_j} (\sqrt{I_i I_j}) (I_i - I_j) \sin(\phi_i - \phi_j) + \\
& + \sum_l \left(-\frac{I_l^2 - 3I_j I_l}{2\sqrt{I_j I_l}} (A_{lj} + A_{jl}) \cos(\phi_j - \phi_l) \sum_i \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \frac{I_l^2 - 3I_i I_l}{2\sqrt{I_i I_l}} \cos(\phi_i - \phi_l) + \right. \\
& - \frac{I_l^2 - 3I_j I_l}{2\sqrt{I_j I_l}} \sin(\phi_j - \phi_l) \frac{A_{lj} + A_{jl}}{\omega_j - \omega_l} \sum_i (A_{li} + A_{il}) \frac{(I_l^2 - 3I_i I_l)}{2\sqrt{I_i I_l}} \sin(\phi_i - \phi_l) + \\
& + \frac{A_{lj} + A_{jl}}{\omega_j - \omega_l} \frac{I_l^2 - 3I_j I_l}{4I_j \sqrt{I_j I_l}} \cos(\phi_j - \phi_l) \sum_i (A_{li} + A_{il}) \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l) + \\
& \left. + (A_{lj} + A_{jl}) \frac{-I_l^2 - 3I_j I_l}{4I_j \sqrt{I_j I_l}} \sin(\phi_j - \phi_l) \sum_i \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \sin(\phi_i - \phi_l) \right) \Big] \quad (5.2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_j^c}{dt} = -\frac{\partial f_2}{\partial \phi_j} = \frac{K^2}{2N^2} & \left[\sum_i \frac{A_{ji} + A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \frac{I_j^2 - 3I_i I_j}{2\sqrt{I_i I_j}} \sin(\phi_i - \phi_j) \sum_i (A_{ij} + A_{ji}) \sqrt{I_i I_j} (I_i - I_j) \cos(\phi_i - \phi_j) + \right. \\
& + \sum_i (A_{ij} + A_{ji}) \sqrt{I_i I_j} (I_i - I_j) \sin(\phi_i - \phi_j) \sum_i \frac{A_{ji} + A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \frac{I_j^2 - 3I_i I_j}{2\sqrt{I_i I_j}} \cos(\phi_i - \phi_j) + \\
& - \sum_i (A_{ij} + A_{ji}) \frac{I_j^2 - 3I_i I_j}{2\sqrt{I_i I_j}} \cos(\phi_i - \phi_j) \sum_i \frac{A_{ji} + A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \sqrt{I_i I_j} (I_i - I_j) \sin(\phi_i - \phi_j) + \\
& - \sum_i \frac{A_{ji} + A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \sqrt{I_i I_j} (I_i - I_j) \cos(\phi_i - \phi_j) \sum_i (A_{ij} + A_{ji}) \frac{I_j^2 - 3I_i I_j}{2\sqrt{I_i I_j}} \sin(\phi_i - \phi_j) + \\
& - \sum_l \left(\frac{A_{lj} + A_{jl}}{\omega_j - \omega_l} \frac{I_l^2 - 3I_j I_l}{2\sqrt{I_j I_l}} \sin(\phi_j - \phi_l) \sum_i (A_{li} + A_{il}) \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \cos(\phi_i - \phi_l) + \right. \\
& - (A_{lj} + A_{jl}) \sqrt{I_j I_l} (I_j - I_l) \sin(\phi_j - \phi_l) \sum_i \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \frac{I_l^2 - 3I_j I_l}{2\sqrt{I_i I_l}} \cos(\phi_i - \phi_l) + \\
& + (A_{lj} + A_{jl}) \frac{I_l^2 - 3I_j I_l}{2\sqrt{I_j I_l}} \cos(\phi_j - \phi_l) \sum_i \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \sqrt{I_i I_l} (I_i - I_l) \sin(\phi_i - \phi_l) + \\
& \left. + \frac{A_{lj} + A_{jl}}{\omega_j - \omega_l} \sqrt{I_j I_l} (I_j - I_l) \cos(\phi_j - \phi_l) \sum_i (A_{li} + A_{il}) \frac{I_l^2 - 3I_j I_l}{2\sqrt{I_i I_l}} \sin(\phi_i - \phi_l) \right) \Bigg] \quad (5.2.2)
\end{aligned}$$

Ora per avere definitivamente l'equazione che descrive il modello di Kuramoto come un caso particolare delle equazioni del moto, dobbiamo inanzi tutto verificare che una volta che ci troviamo sul toro di Kuramoto T_I^N , cioè $I_j = I, \forall j$ la correzioni del controllo dell'equazione di moto dell'azione (5.2.2) si annulla

$$\dot{I}_j^c|_{I_j=I} = 0. \quad (5.2.3)$$

Ed infatti l'identità (5.2.3) si verifica facilmente. Poi una volta che questa condizione è stata soddisfatta, l'equazione di moto dell'angolo, adesso equazione di Kuramoto, viene corretta dal termine di controllo (5.2.1) dove $I_j = I, \forall j$:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_j^k = -\frac{I^2 K^2}{2N^2} & \left[\sum_i (A_{ji} + A_{ij}) \cos(\phi_i - \phi_j) \sum_i \frac{A_{ji} + A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \cos(\phi_i - \phi_j) + \right. \\
& + \sum_i \frac{A_{ji} + A_{ij}}{\omega_i - \omega_j} \sin(\phi_i - \phi_j) \sum_i (A_{ij} + A_{ji}) \sin(\phi_i - \phi_j) + \\
& - \sum_l \left((A_{lj} + A_{jl}) \cos(\phi_j - \phi_l) \sum_i \frac{A_{li} + A_{il}}{\omega_i - \omega_l} \cos(\phi_i - \phi_l) + \right. \\
& \left. + \frac{A_{lj} + A_{jl}}{\omega_j - \omega_l} \sin(\phi_j - \phi_l) \sum_i (A_{li} + A_{il}) \sin(\phi_i - \phi_l) \right) \Bigg]. \quad (5.2.4)
\end{aligned}$$

Osservazione 7. Prima di passare al paragrafo successivo vogliamo attirare l'attenzione su un fatto anticipato già dall'inizio. Come abbiamo appena visto, in modo da ottenere il toro di Kuramoto su cui la dinamica di sincronizzazione controllata avrà luogo, dobbiamo prima verificare che $\dot{I}_j^c|_{I_j=I} = 0, \forall j$. Anche se per il termine di controllo f_2 questo era possibile, questo fatto non è detto che si verifica per gli altri termini di ordine superiore. Per questo basta vedere² che per f_3 la dinamica di Kuramoto non si svolge più su un toro invariante, poiché l'equazione del moto dell'azione corretta fino al secondo ordine non si annulla più. Tuttavia, nel nostro caso noi siamo interessati ad un controllo effettivo del sistema di oscillatori debolmente accoppiati e non ad un controllo "rigoroso" in termini di accuratezza data dal termine completo del controllo (5.1.7). In seguito vedremo che il termine f_2 basta per controllare la sincronizzazione nel modello di Kuramoto e impedirne l'auto-organizzazione.

5.3 Risultati numerici

In questo paragrafo verranno raccolti i risultati numerici del controllo Hamiltoniano della sincronizzazione del modello di Kuramoto applicando la teoria sviluppata precedentemente in questo capitolo. I risultati saranno in più confrontati con il Capitolo 4 dove abbiamo trattato il caso non controllato. Come conclusione vedremo che il controllo Hamiltoniano funziona in modo soddisfacente prevenendo le variazioni emergenti nell'azione osservate in precedenza quando il sistema si sincronizza. Per di più faremo vedere che il parametro d'ordine $r(t)$ come definito da Kuramoto rimane sempre limitato ad un certo valore ma senza andare oltre per tutta la sua esistenza dimostrando così che il sistema non riesce mai a sincronizzarsi completamente.

Cominciamo rivisitando il problema dei 3 oscillatori accoppiati visti in precedenza con rispettive frequenze ($\omega_1 = 0.8, \omega_2 = 1, \omega_3 = 1.2$) e fissando il toro di Kuramoto T^N ad un valore $I = 1/2$. Come abbiamo già enunciato all'inizio di quest'ultimo capitolo, il metodo di controllo Hamiltoniano si può applicare per controllare solo insiemi di oscillatori debolmente accoppiati in modo che il termine f_2 calcolato nella sezione precedente rimanga piccolo. Inoltre l'importanza che questo termine sia piccolo e indispensabile nel nostro caso per avere un controllo efficace del modello di Kuramoto poiché non si possono aggiungere altri termini di ordine superiore per aumentare l'accuratezza del metodo. Fortunatamente questo non è un svantaggio della nostra teoria poiché la sincronizzazione si manifesta spontaneamente anche quando l'accoppiamento risulta debole [10, 14]. Questo è facilitato dal fatto che in popolazioni della stessa specie dove la sincronizzazione avviene nel maggior parte dei casi possiamo liberamente considerare degli oscillatori abbastanza simili anche se non del tutto identici. Dal Capitolo 3 sappiamo che più la distribuzione delle frequenze è stretta e più è facile che la sincronizzazione avvenga. Questo giustifica anche la scelta delle frequenze nel nostro caso.

In Figura 5.1 possiamo apprezzare i risultati ottenuti dall'integrazione numerica delle equazioni di Hamilton con e senza controllo da una parte e quella di Kuramoto dall'altra quando la sincronizzazione si controlla e non. I pannelli *a)* e *b)* sono gli stessi mostrati anche nel capitolo precedente in mancanza del controllo e quando

²Qui non ci fermiamo a mostrare i conti espliciti poiché sono molto lunghi e soprattutto non portano nessuna informazione addizionale.

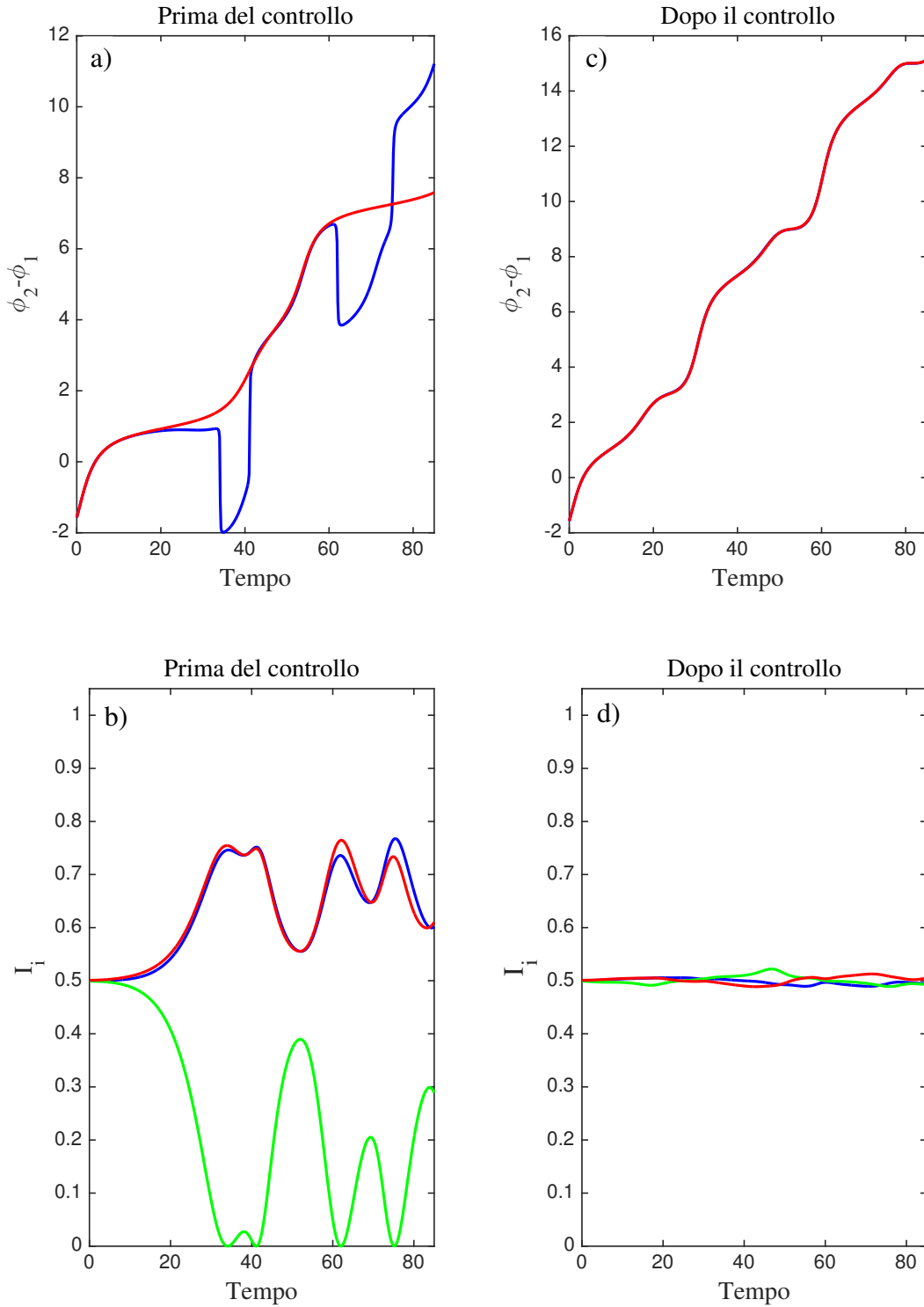


Figura 5.1: Controllo della sincronizzazione per tre oscillatori accoppiati con le rispettive frequenze ($\omega_1 = 0.8, \omega_2 = 1, \omega_3 = 1.2$). *a)* e *b)* sono rispettivamente le fasi e le azioni del modello Hamiltoniano di Kuramoto non controllato. *c)* e *d)* sono invece, rispettivamente le fasi e le azioni del modello Hamiltoniano di Kuramoto controllato. In *a)* e in *c)* in blu viene presentata la soluzione delle equazioni di Hamilton ed in rosso quella ottenuta dall'equazione di Kuramoto. Nel pannello *c)* le due curve sono sovrapposte. In tutti i casi è stato scelto un valore di $K = 0.3$, una condizione iniziale delle fasi $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\pi, \pi/2, \pi/3)$ e le perturbazioni per le fasi sono del ordine 10^{-5} .

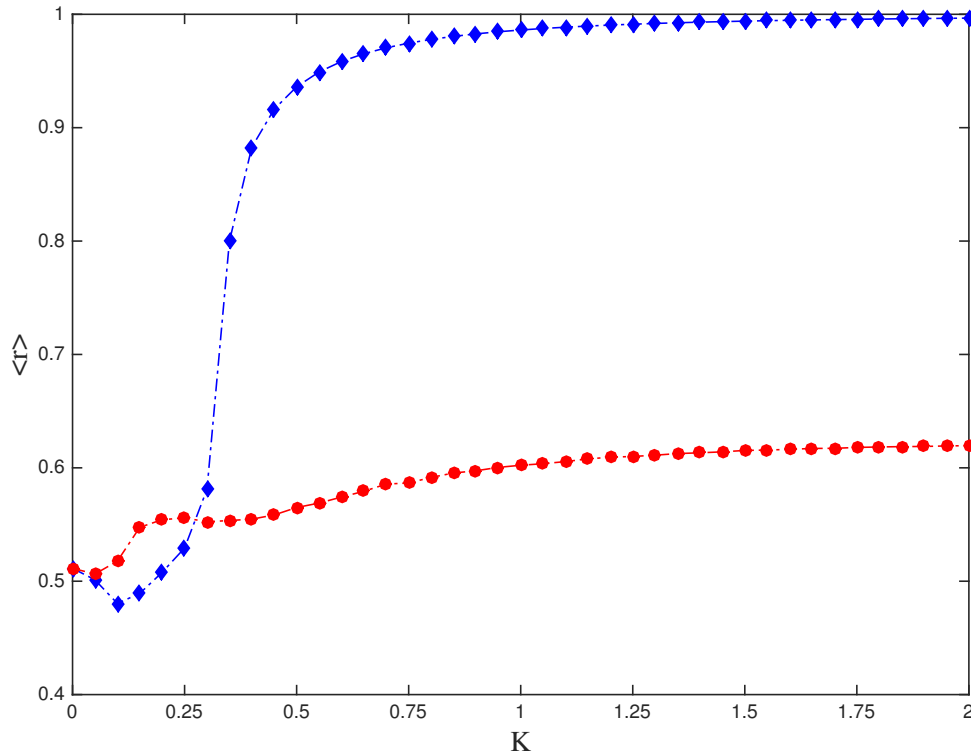


Figura 5.2: Il parametro d'ordine $\langle r \rangle$ mediato in un intervallo temporale di 100 unità di tempo, in funzione dell'accoppiamento K . In blu (rombi) il caso non controllato ed in rosso (cerchi) il caso controllato. A parte il valore di K che è variabile tutti i dati sono uguali a quello della Figura 5.1.

il sistema inizia a sincronizzarsi. In questo regime le azioni come sappiamo (vedi Capitolo 4 per maggior dettagli), non sono più stabili e le variazioni di I_i , $\forall i = 1, 2, 3$ (rappresentato in tre colori diversi in *b*)) si manifestano, testimoniando l'instabilità fuori dal toro invariante di Kuramoto. Come conseguenza la variabile angolare del sistema Hamiltoniano e la fase di Kuramoto (mostrate in *a*)) sono diverse. Quando però si aggiunge il termine correttivo f_2 all'Hamiltoniana (5.1.1) allora la situazione cambia completamente; le variazioni nelle azioni si attenuano (quasi) completamente (Figura 5.1 *d*)) dimostrando così un comportamento stabile intorno al toro $I = 1/2$ e di conseguenza la fase di Kuramoto combacia con la variabile angolare di Hamilton come si vede in Figura 5.1 *c*). La scelta del valore di K è in accordo con le condizioni imposte dall'approccio analitico che si basa in un metodo perturbativo. Per la risoluzione numerica è stato usato un metodo classico Runge-Kutta di ordine *IV* con un piccolo passo (del ordine 10^{-3}) in modo da conservare al meglio le costanti di moto imposte dalla dinamica del problema.

In modo da valutare l'effetto del controllo Hamiltoniano sulla sincronizzazione, in Figura 5.2 mostriamo l'andamento del parametro d'ordine mediato in tempo $\langle r \rangle$ in funzione del valore del accoppiamento K per entrambi i casi senza controllo (blu) e controllato (rosso). Come si può notare in presenza del controllo il parametro d'ordine assume un valore asintotico molto inferiore al valore massimale $\langle r \rangle_{max} = 1$ come avviene nel caso di assenza di controllo.

5.4 Conclusioni

Ed in fine per concludere questo capitolo riassumeremo brevemente quello che abbiamo trattato ed i risultati ottenuti. In anzi tutto abbiamo applicato la teoria di Vittot [23] sul controllo Hamiltoniano alla nostra Hamiltoniana corrispondente in una restrizione su un toro invariante al modello di Kuramoto [22]. Seguendo gli stessi passi come Witthaut e Timme in [22] siamo stato in grado di trasformare il nostro problema dal formalismo di Hamilton in quello di Kuramoto ma adesso con l'aggiunta del termine di controllo. Abbiamo visto che il nostro controllo è effettivo perché non include tutti gli termini di controllo ma solo quello del primo ordine. Tuttavia questo basta per non permettere al sistema di oscillatori debolmente accoppiati di sincronizzarsi come si conferma anche dai risultati numerici. Infatti, per confermare l'efficacia del nostro metodo abbiamo visto l'effetto del controllo anche nelle fasi e nelle azioni fuori dal toro di Kuramoto. Di nuovo in presenza del termine di controllo, esse sono stabili come in un regime non sincronizzato. La nostra teoria è confermata!

Conclusioni

In questa tesi abbiamo discusso l'affascinante fenomeno della sincronizzazione da un punto di vista del controllo Hamiltoniano. La sincronizzazione è uno dei fenomeni fisici più importanti responsabili per l'emergenza dell'auto-organizzazione e del ordine in Natura. Processi importanti biologici come il funzionamento di un peacemaker nel cuore [3] oppure il meccanismo di malattie come l'epilessia o il Parkinson [5] sono esempi dove la sincronizzazione si manifesta. Altri esempi si trovano anche in biologia [1, 2] ed in fisica [6–9]. Clamoroso è stato il caso di Millenium Bridge di Londra [19] dove la sincronizzazione delle parti componenti il ponte causava forti vibrazioni laterali manifestando un classico fenomeno di risonanza. Prendendo spunto proprio da quest'ultimo caso siamo partiti alla ricerca di un metodo che poteva attenuare o meglio ancora controllare in modo robusto l'effetto negativo che la risonanza causa nelle costruzioni o nelle processi neurologici [48]. Fin ora in letteratura non esistono studi che diano una soluzione appropriata a questo problema a parte tentativi vaghi di utilizzare metodi classici come di controllo tramite dei feedback negativi [20] oppure intervenire direttamente sugli parametri del sistema in questione [21]. Con questo lavoro noi abbiamo presentato un metodo con cui è possibile per un ampia classe di oscillatori debolmente accoppiati la cui dinamica è riproducibile dal celebre modello di Kuramoto [13], di progettare un piccolo controllo *ad hoc*. Il procedimento è stato basato su metodi di controllo già esistenti nel campo della meccanica Hamiltoniana [23]. Tuttavia per usufruirne di questa teoria è indispensabile un formalismo Hamiltoniano del problema di Kuramoto. Per questo motivo ci è venuto in aiuto un recente lavoro di Witthaut e Timme [22] i quali hanno potuto trovare un Hamiltoniana la cui dinamica ristretta ad un toro invariante mimica quella di Kuramoto. Questi autori hanno trovato che la dinamica della sincronizzazioni si può interpretare tramite un formalismo Hamiltoniano. Infatti in un regime incoerente le variabili delle azioni della controparte Hamiltoniana rimangono stabili intorno ad un toro invariante detto anche toro di Kuramoto. La dinamica su di esso invece riproduce esattamente quella del modello di Kuramoto. Quando il sistema inizia però a sincronizzarsi le azioni diventano instabili trasversalmente al toro di Kuramoto indicando una dinamica caotica. Il comportamento Hamiltoniano dimostra di seguire qualitativamente quello della sincronizzazione. A questo punto è stato quasi immediato l'intuito di utilizzare le istruzioni appena descritte per poter costruire

il controllo direttamente sul modello di Kuramoto. In questo modo siamo stati in grado di costruire un metodo di controllo effettivo che ha come obiettivo principale quello di impedire il sistema di auto-organizzarsi. Le simulazioni numeriche infatti confermano questa affermazione. In presenza del termine di controllo che si aggiunge all'equazione di Kuramoto le azioni si presentano stabili ed il caos svanisce. Per di più il parametro d'ordine converge asintoticamente ad un valore molto più basso per un ampio intervallo di valori del coefficiente di accoppiamento affermando così in modo definitivo l'esattezza della nostra teoria. Come conclusione possiamo affermare che il problema della sincronizzazione della folla come nel caso di Millennium Bridge può essere risolto in fase di progettazione con un costo aggiuntivo minimale. Questo significa che i ponti del futuro saranno robusti alle vibrazioni causati da effetti di risonanza.

APPENDICE A

Integratori simplettici

Al fine di effettuare calcoli numerici, è necessario usare degli integratori numerici adattati per i sistemi Hamiltoniani. Qui daremo una breve descrizione di essi. Come abbiamo visto in questa tesi la soluzione formale delle equazioni di Hamilton è

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\{H\}}\mathbf{x}(0)$$

dove $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

L'obiettivo di uno schema numerico d'integrazione è quello di conservare alcune delle proprietà dei sistemi Hamiltoniani come per esempio la conservazione di H è la simpletticità del flusso (che abbiamo appena introdotto) che la maggior parte dei metodi classici non riescono a fare. In [49] sono stati illustrati diversi di questi metodi. In seguito, ci limiteremo a presentare lo schema basato sul teorema di Campbell-Baker-Hausdorff (CBH) (p.es. [50]). Se H si può decomporre come

$$H = A + \epsilon B \tag{A.0.1}$$

allora l'esponenziale ad esso associato è¹

$$e^{t\{H\}} = e^{t\{A\}}e^{t\{\epsilon B\}} + \mathcal{O}(t\epsilon)$$

Questa formula è particolarmente utile nel caso quando si conoscano i flussi di A e B rispettivamente $e^{t\{A\}}$ e $e^{t\{B\}}$. Allora l'integratore con passo di integrazione τ è

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\tau\{A\}}e^{\tau\{\epsilon B\}}\mathbf{x}_k.$$

L'algoritmo è: conoscendo \mathbf{x}_k , si calcola

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k &= e^{\tau\{\epsilon B\}}\mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k+1} &= e^{\tau\{A\}}\tilde{\mathbf{x}}_k. \end{aligned}$$

¹Qui facciamo uso della nota proprietà: $e^{\{A\}}e^{\{B\}} = e^{\{A\}+\{B\}+\frac{1}{2}(\{A\}\{B\}-\{B\}\{A\})+\dots}$.

Casi banali quando siamo in grado di conoscere le soluzioni di un sistema Hamiltoniano sono ovviamente quando esso dipende solo dal vettore dei momenti oppure solo da quello delle coordinate. Partendo proprio da questa formulazione che fa uso della formula *CBH*, si possono derivare integratori efficienti di ordine superiore, dove tra i più famosi sono quelli di Yoshida [51] e Laskar [52].

Bibliografia

- [1] J. Buck and E. Buck. Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies of southeast Asia may use anticipatory time-measuring in synchronizing their flashing. *Science*, 159:1319–1327, (1968).
- [2] T. J. Walker. Acoustic synchrony: two mechanisms in the snowy tree cricket. *Science*, 166:891–894, (1969).
- [3] C. S. Peskin. *Mathematical aspects of heart physiology*. Courant Institute of Mathematical Science Publication, New York, (1975).
- [4] C. Liu, D. R. Weaver, S. H. Strogatz, and S. M. Reppert. Cellular construction of a circadian clock: period determination in the suprachiasmatic nuclei. *Cell*, 91: 855–860, (1997).
- [5] L. Glass. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature*, 410: 277–284, (2001).
- [6] Z. Jiang and M. McCall. Numerical simulation of a large number of coupled lasers. *J. Opt. Soc. Am.*, 10:155–163, (1993).
- [7] R. A. York and R. C. Compton. Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 39:1000–1009, (1991).
- [8] K. Wiesenfeld and S. H. Strogatz P. Colet. Synchronization transitions in a disordered Josephson series array. *Phys. Rev. Lett.*, 76:404–407, (1996).
- [9] K. Wiesenfeld and S. H. Strogatz P. Colet. Frequency locking in Josephson arrays: connection with the Kuramoto model. *Phys. Rev. E*, 57:1563–1569, (1998).
- [10] S. H. Strogatz. *Sync: How order emerges from chaos In the Universe, Nature, and daily Life*. Hachette Books, (2004).
- [11] A. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, 16:15–42, (1967).

- [12] A. T. Winfree. *The geometry of biological time*. Springer, New York, (1980).
- [13] Y. Kuramoto. *H. Arakai (ed.), International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics*. Springer, New York, (1975).
- [14] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves and turbulence*. Springer, Berlin, (1984).
- [15] S. H. Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143:1–20, (2000).
- [16] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz. Amplitude death in an array of limit-cycle oscillators. *J. Statist. Phys.*, 60:245–262, (1990).
- [17] S. H. Strogatz and R. E. Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *J. Statist. Phys.*, 63:613–635, (1991).
- [18] C. Davies. £5m bill to mend wobbly Millennium Bridge. *The Telegraph*, (2000).
- [19] S. H. Strogatz, D. M. Abrams, A. McRobie, B. Eckhardt, and E. Ott. Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge. *Nature*, 438:43–44, (2005).
- [20] O. V. Popovych, C. Hauptmann, and P. A. Tass. Effective desynchronization by nonlinear delayed feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 94:164102, (2005).
- [21] Y. Zhai, I. Z. Kiss, P. A. Tass, and J. L. Hudson. Desynchronization of coupled electrochemical oscillators with pulse stimulations. *Phys. Rev. E*, 71:065202R, (2005).
- [22] D. Witthaut and M. Timme. Kuramoto dynamics in Hamiltonian systems. *Phys. Rev. E*, 90:032917, (2014).
- [23] M. Vittot. Perturbation theory and control in classical or quantum mechanics by an inversion formula. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:6337–6357, (2004).
- [24] M. Vittot, C. Chandre, G. Ciraolo, and R. Lima. Localized control for non-resonant Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, 18:423–440, (2005).
- [25] G. Ciraolo and et. al. Control of Hamiltonian chaos as a possible tool to control anomalous transport in fusion plasmas. *Phys. Rev. E*, 69:056213, (2004).
- [26] C. Chandre and H. R. Jauslin. Renormalization-group analysis for the transition to chaos in Hamiltonian systems. *Phys. Rep.*, 365:1, (2002).
- [27] A. Fasano and S. Marmi. *Meccanica analitica*. Bollati Boringhieri, (2002).
- [28] V. I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti, (2004).
- [29] N. Bourbaki. *Eléments de mathématiques: Groupes et algèbres de Lie*. Hermann, (1972).
- [30] A. N. Kolmogorov. On the conservation of conditionally periodic motions under small perturbation of the Hamiltonian. *Dokl. Akad. Nauk. SSR*, 98:527–530, (1954).

- [31] J. K. Moser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II*, 1:1–20, (1962).
- [32] V. I. Arnold. Proof of a Theorem by A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian. *Russian Math. Survey*, 18:13–40, (1963).
- [33] J. Boreux. *Control theory of area preserving maps - Application to particle accelerator systems*. PhD Thesis, FUNDP (Namur), (2013).
- [34] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, and R. Spigler C. J. Pérez Vicente, F. Ritort. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 77:137–185, (2000).
- [35] N. Wiener. *Nonlinear problems in random theory*. MIT Press, Cambridge, MA, (1958).
- [36] Y. Kuramoto and I. Nishikawa. Statistical macrodynamics of large dynamical systems. Case of a phase transition in oscillator communities. *J. Statist. Phys.*, 49: 569–605, (1987).
- [37] P. Glansdorff and I. Prigogine. *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*. Wiley, London, (1971).
- [38] J. D. Crawford. Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators. *J. Statist. Phys.*, 74:1047–1084, (1994).
- [39] H. Sakaguchi. Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields. *Progr. Theoret. Phys.*, 79:39–46, (1988).
- [40] C. Gardiner. *Stochastic methods: A handbook for the natural and social sciences*. Springer, (2009).
- [41] N. G. Van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*. North Holland Personal Library, (2007).
- [42] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. J. Glick. Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (i). Exact solutions and perturbation theory. *Nucl. Phys.*, 62:188–198, (1965).
- [43] Q. Thommen, J. C. Garreau, and V. Zehnlé. Classical chaos with Bose-Einstein condensates in tilted optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 91:210405, (2003).
- [44] R. Carretero-Gonzalez, D. J. Frantzeskakis, and P. G. Kevrekidis. Nonlinear waves in Bose-Einstein condensates: physical relevance and mathematical techniques. *Nonlinearity*, 21:R139, (2008).
- [45] I. Bloch. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nat. Phys.*, 1:23, (2005).
- [46] F. A. Rodrigues, T. K. DM. Peron, P. Ji, and J. Kurths. The Kuramoto model in complex networks. *Phys. Rev. E*, 610:1–98, (2016).

- [47] Y.-Y. Liu, J.-J. Slotine, and A.-L. Barabási. Controllability of complex networks. *Nature*, 473:167–173, (2011).
- [48] V. H. P. Louzada, N. A. M. Araújo, Jr. J. S. Andrade, and H. J. Herrmann. How to suppress undesired synchronization. *Sci. Rep.*, 2:658, (2012).
- [49] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration. structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*. Springer-Verlag, (2002).
- [50] L. Nadolski and J. Laskar. Application of a new class of symplectic integrators to accelerator tracking. *EPAC*, pages 1276–1278, (2002).
- [51] H. Yoshida. Construction of higher order symplectic integrators. *Phys. Lett. A*, 150:262–268, (1990).
- [52] J. Laskar and P. Robutel. High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celestial Mechanichs and Dynamical Astronomy*, 80:39–62, (2001).
- [53] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, (2003).
- [54] J. Boreux, T. Carletti, C. Skokos, Y. Papaphilippou, and M. Vittot. Efficient control of accelerator maps. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 22:1250219, (2004).
- [55] M. K. McClintock. Menstrual synchrony and supression. *Nature*, 229:244–245, (1971).